Beyträge
zur
Beförderung des Studiums
der
Mathematik,
insbesondere
für Schullehrer und Praktiker.

Von
Johann Andreas Christian Michelsen,
Professor der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium.

Drittes Stück.

Berlin, 1790.
Im Verlage der Königl. Preuß. Akadem. Kunst- und Buchhandlung.

I.

Von der Exhaustions-Methode.

Nach *Saverien*, in seinem *Dictionaire universel de Mathématique & de Physique*, Titel Exhaustion, ist die Exhaustions-Methode nichts anders, als diejenige Methode die Gleichheit zweyer Größen zu beweisen, wobey man die Unmöglichkeit des Gegentheils durch Entwickelung des damit verknüpften Widerspruchs darlegt. Der ganze angeführte Artikel ist folgender. C'est en effet une méthode de prouver l'égalité de deux quantités en réduisant à l'absurde ceux qui la nient. A cette fin, on suppose que si l'une étoit plus grande ou plus petite que l'autre, il s'ensuivroit une absurdité. Cette méthode est due à *Euclide*, du moins est-ce de lui que nous la ténons. Elle est fondée sur la première proposition du Livre 10 de ses Élémens, & elle a été mise en usage par *Archimedes*, & par plu-

sieurs anciens Géométres. Mr. Mac-Laurin s'en est servi pour démontrer en toute rigueur la théorie des fluxions.

Es fällt aber hierbey sehr bald in die Augen, daß der V. entweder die Exhaustions-Methode nicht gekannt, oder diesen Artikel nicht mit der gehörigen Ueberlegung niedergeschrieben habe. Denn wäre die von ihm gegebene Erklärung richtig: so wäre die Exhaustions-Methode und der indirecte oder apogogische Beweis nicht von einander verschieden. Man vergleiche Wolfs Beschreibung in seiner Logik im Capitel von der Demonstration. *Demonstratio apogogica seu indirecta* est, qua, posito contrario ejus, quod probari debet, tanquam vero, colligitur, quod propositioni verae, vel notioni subjecti contradicit. Auch ist bekannt, daß der indirecte Beweis ebenfalls den Namen Deductio ad absurdum führt. Wie könnte aber alsdann behauptet werden, daß die Exhaustions-Methode auf dem ersten Satze des zehnten Buchs der Euclideischen Elemente beruhe? da bekannter Maßen lange vorher, ja selbst im ersten Buche der Elemente des Euclides, mehrere apogogische Beweise vorkommen.

Treffender ist daher dasjenige, was der Abbe *de la Chapelle* unter dem Titel Exhaustion im ersten Theile der *Encyclopédie méthodique* sagt. La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable; & en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde. Ce n'est pas pourtant pas parce qu'on y réduit à l'absurde, que l'on a donné à cette méthode le nom de méthode d'exhaustion: mais comme l'on s'en sert pour démontrer qu'il existe un rapport d'égalité entre deux grandeurs, lorsqu'on ne peut pas le prouver directement, on se restreint à faire voir qu'en supposant l'une plus petite ou plus grande que l'autre, on tombe dans une absurdité évidente: afin d'y parvenir, on permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de determiner une différence à volonté; on leur demontre que la différence qui existeroit entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eût) seroit plus petite que la différence assignée; & qu'ainsi cette différence ayant pu être supposée d'une petitesse qui, pour ainsi dire, *épuisât* toute grandeur assignable, c'est une nécessité de convenir que

la différence entre ces grandeurs s'évanouit véritablement. Or c'est cette petitesse indivisible, inassignable, & qui *épuise* toute grandeur quelconque, qui a fait donner à la méthode présente le nom de *méthode d'exhaustion*, du mot latin *exhaustio*, épuisement.

Im ersten Stücke dieser Beyträge S. 3—5 findet man ein Beyspiel von der Exhaustions-Methode aus einer Schrift des Archimedes, welches sehr geschickt ist, diese Beschreibung zu erläutern. Will man mehr haben, so enthalten die Schriften des Archimedes und der übrigen Mathematiker unter den Alten deren eine große Menge; und verlangt man eine ausführlichere Entwickelung der Natur der Exhaustions-Methode, so trifft man dergleichen in Mac-Laurin's Treatise of fluxions, so wie eine Nachahmung und Erweiterung dieser Methode in Newtons Principiis mathematicis Philosophiae naturalis im ersten Bande im ersten Abschnitte an.

Ich behalte es mir vor, zu einer andern Zeit noch einmal und weitläuftiger von eben diesem Gegenstande zu reden; jetzt ist es bloß meine Absicht, darüber einige Gedanken mitzutheilen und Kennern zur Prüfung vorzulegen.

Die Größen, womit sich die Mathematik beschäftiget, lassen sich in bestimmte und unbestimmte eintheilen, und die letztern sind wieder entweder bloß unbestimmt aber doch bestimmbar, oder unbestimmbar, so wie diese endlich entweder unbestimmbar groß oder unbestimmbar klein. Unendlich große Größen in dem Verstande, daß man darunter solche Größen denke, welche keine größern über sich haben, so wie auch unendlich kleine Größen, die ihnen gerade gegenüber ständen, erkennt die Mathematik nicht für solche, worauf sich ihre Untersuchungen erstreckten; als Hülfsmittel zur Erleichterung ihrer Nachforschungen, oder zur Abkürzung ihrer Wege braucht sie dieselben bisweilen. Ja, da sich die unbestimmbar großen und unbestimmbar kleinen Größen, in sofern sie unbestimmbar sind, weder in Ansehung ihrer Gleichheit und Ungleichheit unter einander, noch in Ansehung ihres Verhältnisses zu einander, betrachten lassen; so können sogar diese Größen nicht anders als mit Einschränkung dem Gegenstande der Mathematik zugezählt werden.

Als außer allem Zweifel gesetzt, darf ich freylich diese Behauptungen noch nicht ansehen;

denn nur eins anzuführen, so versichert der Hr. Hofprediger und Professor Schulz in Königsberg in seinen vor einigen Wochen herausgegebenen Anfangsgründen der reinen Mathesis, Königsberg 1790, S. 283, daß, nach seiner entdeckten Theorie der Parallelen, Königsberg 1785 und 1786, der eben daselbst 1786 erschienenen Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe dieser Theorie, und vorzüglich nach seinem Versuche einer genauen Theorie d s Unendlichen, 1788, das ganze Gebiet des Unendlichgroßen dem Geometer eben so meßbar geworden sey, als das Endliche. Auf diese Art würde freylich die Lobrede auf die Analysis des Unendlichen, womit der *M. de l'Hopital* die Vorrede zu seiner *Analyse des infiniment petits* anhebt, vollen Grund haben, und mein Spott darüber in meinen Anmerkungen und Zusätzen zu der Uebersetzung des ersten Theils der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung, S. 352 f. bodenloß und zwiefachen Tadels würdig seyn. Allein einmal muß ich erst die Widerlegung abwarten, die mir die in den gedachten Anmerkungen und Zusätzen geäußerten Ueberzeugungen rauben wird, und dann hoffe ich, in dem drit-

ten Theile der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von Eulern, welcher versprochener Maßen lauter Zusätze enthalten und Ostern 1791 erscheinen wird, diese Sache ins Reine zu bringen, und nicht nur den Ungrund, sondern auch die Unnützlichkeit, wo nicht selbst öfters Schädlichkeit, der gedachten Schulzischen Theorie ausführlich entwickelt darzulegen.

Dieses vorausgesetzt, frage ich: Was hat man unter unbestimmbar kleinen Größen zu verstehen? und glaube nicht zu irren, wenn ich behaupte, man werde mir antworten: Größen, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben, d. h. deren Verhältniß zu einer gleichartigen bestimmten Größe sich durch irgend eine Zahl ausdrucken läßt. Hiernach wäre also $\delta.x$ eine unbestimmbar kleine Größe, wenn allemal

$$m.(\delta.x) < x$$

wäre, m mögte eine noch so große Zahl, und x eine noch so kleine Größe bedeuten, wofern nur beyde in das Gebiet des Bestimmbaren gehörten.

Räumt man dieses ein, so ist, wenn m irgend eine bestimmte Zahl bedeutet, und $m(\delta.x) = \triangle.x$ gesetzt wird, auch $\triangle.x$ eine unbe-

stimmbar kleine Größe. Denn solle $\Delta . x$ nicht unbestimmbar klein seyn, so müßte man

$$\Delta . x : x = 1 : n$$

oder

$$\Delta . x = \frac{x}{n}$$

setzen, und dabey unter n irgend eine bestimmte Zahl denken können. Dies ist aber bey der angenommenen Bedingung unmöglich. Denn da

$$\Delta . x = m\,(\delta . x)$$

gesetzt worden ist, so würde folgen, daß auch

$$m\,(\delta . x) = \frac{x}{n}$$

und also

$$\delta . x = \frac{x}{mn}$$

oder

$$\delta . x : x = 1 : mn$$

wäre; und diese Behauptung steht dem angenommenen Begriffe von $\delta . x$ gerade entgegen.

Es lassen sich daher auch unbestimmbar kleine Größen gedenken, die, eben sowohl als die bestimmten, aus Theilen bestehen; und sonach ist der Gebrauch des Ausdrucks, unbestimmbar kleine Größen, allerdings erlaubt und rechtmäßig.

Nun folgende Frage: Giebt es in der Geometrie, d. h. in der Wissenschaft desjenigen, was wir uns in dem unbegrenzten Raume, der uns bey der Abstraction von allen sinnlichen Objecten übrig bleibt, denken können, unbestimmbar kleine Größen?

Im zehnten Buche der Euclideischen Elemente im ersten Satze wird bewiesen, daß, wenn zwey ungleiche Größen gegeben sind, und von der größern mehr weggenommen wird, als die Hälfte, von dem Reste abermals mehr, als die Hälfte, und dies so immerfort, endlich ein Rest bleibt, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe; und die Gründe, worauf diese Behauptung gestützt wird, behalten ihre Kraft, wenn man, statt immer mehr als die Hälfte wegzunehmen, genau die Hälfte abzieht. Es bedarf aber keines weitläuftigen Beweises, daß man durch die Anwendung dieses Satzes, da man dabey von einer gegebenen Größe ausgeht, nie zu einer Größe gelange, die unbestimmbar klein wäre. Denn da der Theil, welchen man dabey fortgesetzt wegnimmt, er mag die Hälfte oder mehr als die Hälfte seyn, ein gegebener Theil ist, und zuerst von einer gegebenen Größe

weggenommen wird: so kann weder der erste Rest, noch irgend einer der folgenden, eine Größe werden, die sich nicht geben ließe.

Allein im sechszehnten Satze des dritten Buchs beweiset Euclides, daß ein auf eines Kreises ACBD, Fig. 33, Durchmesser AB, in dessen einem Endpunkte A aufgerichteter Perpendikel AE außerhalb des Kreises, und zwischen dem Bogen CGA und dem Perpendikel AE keine gerade Linie falle. Zieht man daher AF, so schneidet dieselbe allemal den Bogen AGC in H, so daß dieser Punkt H dem Punkte A desto näher liegt, je kleiner der Winkel EAF angenommen wird. Es sey EI mit AB und HK mit beyden parallel: so verhält sich allemal, der Durchschnittspunkt H mag liegen, wo er will,

$$AK : AE = KH : EI,$$

und KH ist gegeben, wenn das Verhältniß AK : AE bekannt ist. Nimmt man daher AK immer kleiner und kleiner an, so wird auch KH immer mehr und mehr vermindert, aber es bleiben, wie weit man auch auf diese Art fortgehen mag, noch immer mit AB parallele und zwischen Punkten, davon der eine in AK zwischen A und K, und der andere in dem Bogen AH

zwischen A und H befindlich ist, liegende Linien übrig, welche man dabey nicht erreicht. Geht man also von A aus, und denkt sich A zunächst liegende Punkte, und von ihnen mit AB parallele und nach dem Bogen AH gezogene Linien: so sind darunter auch solche, die kleiner angenommen werden müssen, als jede gerade Linie die gegeben werden kann.

Wie viele solcher Linien lassen sich in dem angeführten Falle annehmen?

Es giebt Fragen, die dem Fragenden keine Ehre machen, und welche beantworten wollen, eben so wenig Ruhm bringt, selbst wenn die gegebenen Antworten allen möglichen Schein des Tiefsinns und der Gelehrsamkeit haben. Wenn die Frage an sich ungereimt ist, sagt Hr. Kant, und unnöthige Antworten verlangt, so hat sie, außer der Beschämung dessen, der sie aufwirft, bisweilen noch den Nachtheil, den unbehutsamen Anhörer derselben zu ungereimten Antworten zu verleiten, und den belachenswerthen Anblick zu geben, daß einer (wie die Alten sagten) den Bock melkt, der andere ein Sieb unterhält. Beyspiele solcher Fragen hat man, um aus einer unzähligen Menge nur zwey anzuführen,

einmal an der, welche Hr. Euler in seinen Briefen an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände der Physik und Philosophie, in der Untersuchung über den Sitz der Seele, in ihrer Blöße darstellt; und zweytens an der, welche Hr. Kant am angezogenen Orte entwickelt*). Ob die aufgeworfene Frage ebenfalls in diese Classe gehöre, oder nicht, will ich hier nicht entscheiden. Denn einmal sind Abfertigungen, wozu ein Euler und Kant ein Recht haben, nicht jedem andern erlaubt; und dann würde dazu eine zwar kurze, aber genaue Entwickelung der Operationen erfordert werden, welche wir vornehmen, wenn wir zählen; und diese Entwickelung mögte ich lieber dem Orte aufbehalten, wo ich zugleich ihre Nothwendigkeit und Unentbehrlichkeit unverkennbar werwerde darlegen können. Also antworte ich: Genau so viel, als man Punkte neben einander sich denken muß, um dadurch unmittelbar eine gerade Linie zu bekommen, welche zu einer gegebenen ein durch Zahlen ausdruckbares Verhältniß hat.

*) Critik der reinen Vernunft, S. 82, 83.

Hätte ich bey dem gegenwärtigen Aufsatze keine bestimmte Absicht, so setzte ich über die Linien, die kleiner sind als jede gegebene, noch einige Fragen her, deren Entzweck wichtiger wäre, als der der vorhergehenden: jetzt muß ich mich begnügen, folgende aus dem Gesagten fließende Resultate beyzufügen.

Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, sind keine Undinge. Linien dieser Art macht das Vorhergehende unleugbar, und von geraden Linien zu Quadraten und Würfeln ist der Weg genug gebahnt. Aber daß Größen, die kleiner seyn sollen, als jede Größe welche sich angeben läßt, in das Gebiet des bloß Gedenkbaren und durch keine Construction unmittelbar Darzustellenden gehören, bedarf darnach hoffentlich auch keines weitern Beweises, obgleich hiermit nicht gesagt werden soll: es lasse sich, im Fall es verlangt würde, weiter keiner führen.

Bey einer genauern Entwickelung unserer Begriffe der unbestimmbar kleinen oder derjenigen Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, hält es nicht schwer, zu zeigen, daß diese Größen nicht mit Elementen

im strengen Sinne oder mit untheilbaren Größen-Einheiten vermengt werden dürfen. Aber auch Elemente in diesem Sinne genommen, lassen sich nicht zu den Undingen zählen. Denn einmal könnte es, wie Hr. Klügel erst kürzlich *) wieder behauptet hat, sehr wohl seyn, daß die Ausdehnung nichts selbstständiges, sondern nur ein nach gewissen Gesetzen bestimmter, in nicht ausgedehnten Dingen gegründeter Schein wäre; und dann giebt es in der Mathematik einen Weg, bestimmte Größen aus Elementen, nicht additionsmäßig zusammen zu setzen sondern, entstehen zu lassen, wobey selbst nicht einmal eine Veranlassung zu verwirrenden Fragen über die Elemente und den aus Elementen entstandenen Größen übrig bleibt.

Endlich ist klar, daß wir beym Ausgehen von gegebenen Größen weder auf dem Wege der Subtraction, noch dem der Division, noch dem der Extraction der Wurzeln zu unbestimmbar kleinen Größen gelangen, weil unbestimmbar kleine

*) In Grundsätze der reinen Mechanik, in Hrn. Eberhards philosophischen Magazine, im ersten Bande, S. 425.

kleine Größen nicht solche seyn sollen, die kleiner sind, als Eine gegebene Größe, sondern solche, die jede gegebene oder angebliche Größe an Kleinheit übertreffen.

Dieses alles vorausgesetzt, frage ich: Wie weit erstrecken sich diejenigen Exhaustions-Beweise, welche unter die Beschreibung des Abbe *de la Chapelle* gehören, und wovon der oben angegebene Beweis ein Beyspiel ist? Meiner Meynung nach nicht weiter, als daß sie die Gleichheit zweyer Größen darthun, in sofern sich diese Größen durch Zahlen ausdrücken lassen. Daß sich keine Größe geben lasse, um welche ein Kreis und ein rechtwinkliges Dreyeck von einander verschieden wären, dessen eine Cathete dem Umfange des Kreises, und die andere dem Radius desselben gleich ist, das setzt z. B. der Archimedeische Beweis außer allem Zweifel; allein ob nicht gleichwohl zwischen einem Kreise und einem Dreyecke von der gedachten Art ein Unterschied möglich sey, dessen Größe zwar unbestimmbar klein, aber demungeachtet immer ein gedenkbarer Unterschied und nicht = 0 wäre? Dieses läßt sich darnach weder bejahen, noch verneinen.

Irre ich mich in dieser Behauptung nicht: so ist das eine sehr leichte Folge aus dem Bisherigen, daß alle die Sätze der Mathematik, welche auf Exhaustions-Beweisen der beschriebenen Art beruhen, so lange sie bloß dadurch bewiesen werden, noch nicht in möglich größter Schärfe und Strenge bewiesen worden seyen; und dann entsteht natürlich eine doppelte Frage, nemlich:

1. Wie läßt sich die gedachte Exhaustions-Methode vervollkommnen? und wie weit ist sie durch Newton und Mac-Laurin, in den oben angezeigten Werken, und von andern, insbesondere neuerlich durch Hrn. *l'Huilier* in seiner Exposition élémentaire des principes des Calculs supérieurs gebracht worden?
2. Was läßt sich, im Fall sie bey aller Erweiterung doch nicht mit Strenge bis zu den unbestimmbar kleinen Größen und zu den Elementen reichen sollte, zu dieser Absicht für eine andere Methode brauchen?

Ich lasse es übrigens hier dahin gestellt seyn, ob man diese Untersuchung der Mühe werth halten werde, oder nicht? Vielleicht nimmt das zum voraus dawider ein, weil es beym ersten

Anblick scheinen kann, als ob sich dabey nothwendig Philosophie einmengen müsse, und nach einem schon vor vierzig Jahren von einem unserer ersten Mathematiker gefällten Urtheile die Philosophie, wenn sie die Mathematik hofmeistern will, der Spinne gleicht, die mit acht Augen nichts weiter kann als Fliegennetze weben. Auch ist es mir ein Grund mehr, dies zu vermuthen, da in dem 78sten Stücke der Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen, von diesem Jahre, in der Anzeige des ersten Theils meiner Uebersetzung der Eulerischen Differenzial-Rechnung des Lichts und der Sicherheit gedacht wird, welches, meiner Meynung nach, die Mathematik von einer Philosophie erhalte, von der selbst ihre Verehrer sagen, was ein Apostel von des andern Briefen sagte *). Es

*) Irre ich nicht, so hat diese Anzeige Hrn. Hofr. Kästner zum Verfasser, und außer andern Gründen berechtigt mich auch die frühe Erscheinung derselben zu meiner Muthmaßung. In diesem Falle darf man die angeführte Aeußerung nicht als eine von den Insinuationen ansehen, wie bey andern Recensenten eben nicht ganz ungewöhnlich sind; denn das biedere Verhalten, welches Hr.

ist, nach einem allgemeinen Urtheile, zwischen der Philosophie und zwischen philosophischen

„Kästner in Fällen, die keinen Zweifel übrig lassen, gegen mich bewiesen, hat mich dazu zu oft an Worte erinnert, welche mein erster Brief an Ihn enthielt, und meine Empfindung mir in die Feder dictirt hatte: So oft ich Seine Schriften läse, beneidete ich diejenigen, die das Glück gehabt, Seinen mündlichen Unterricht und Seinen nähern Umgang zu genießen Aber gleichwohl könnte sie von manchen Lesern auf eine Art gebraucht werden, welche Hr. Kästner nicht zur Absicht gehabt hat; und sonach hoffe ich, daß das Folgende diesem mir nicht bloß von Seiten seiner Verdienste um die Mathematik aller Verehrung und Ehrfurcht werthen Greise weit eher angenehm als zuwider seyn werde.

Ich habe in den Anmerkungen und Zusätzen, womit ich den ersten Theil der Eulerischen Differenzial-Rechnung begleitet habe, und welche, da ich einen großen Theil derselben Schülern der Differenzial-Rechnung bestimmte, nothwendig manches längst bekannte enthalten mußten, aber hoffentlich daneben auch einiges nicht so ganz bekannte enthalten werden, gelegentlich Hrn. Kants Definition der Mathematik unter den bisherigen für die beste erklärt, und daraus zwar keine durch-

Systemen ein Unterschied; und so viel Recht die Mathematik hat, die Philosophie zurückzuwei-

aus neue, aber doch viel genauere Eintheilung der Mathematik hergeleitet, als meines Wissens bis jetzt gemacht worden ist. Außerdem habe ich darauf gedrungen, daß man in der allgemeinen Mathematik, und insbesondere in der Differenzial- und Integral-Rechnung, von einer ähnlichen Erklärung ausgehen mögte, und die Vortheile erwähnt, welche, meiner Meynung nach, damit verbunden seyn würden. Hätte ich behauptet, die Mathematik müsse von der Kantischen Philosophie erst noch das erforderliche Licht und eine vollkommnere Sicherheit erhalten: so wäre diese Behauptung, in Verbindung mit den im zweyten Aufsatze des zweyten Stücks gegenwärtiger Beyträge S. 141 geäußerten Gedanken über die Stelle, welche Hrn. Kants Critik der reinen Vernunft eigentlich zukomme, allerdings ein sogar höhnenden Spottes werther Gegenstand. Allein, wenn ich auf der andern Seite, indem ich da, wo bloß klare Vorstellungen ausreichen, d. h. in der Elementar-Mathematik, auch nichts weiter verlange, bey solchen Gegenständen, wo man nicht unmittelbar aus Constructionen, sondern mittelbar oder durch sie aus Begriffen erkennt, deutliche und vollständige Begriffe als Grundbe-

sen, wenn sie sich ihr als Hofmeisterin aufdrin-
gen will, so wenig würde sie sich von einer lie-

griffe fordere, philosophire ich deswegen, wo ich mathematisch verfahren sollte? Es müßte doch in der That aus den Loosen, welche Wißbegierigen bestimmt sind, mir gerade das allertraurigste zu Theil geworden seyn, wenn ich bey einem durch nichts zu ermüdenden, eine lange Reihe von Jahren fortgesetzten und noch immer wachsenden Bestreben, die wahre Methode in der Mathematik nach ihrem ganzen Umfange kennen zu lernen; bey dem vom Anfang meines Studiums der Mathematik an befolgten Eigensinne, mündlichen Unterricht in der reinen Mathematik gar nicht, und schriftlichen bloß als Veranlassung und Antrieb zur Erfindung durch eigenes Nachdenken zu gebrauchen; bey dem nicht ohne die größte Anstengung ausgeübten Vorsatze, über angewandte Mathematik eher keine Vorlesungen zu hören, ehe ich nicht dieselbe, wozu ich in der lateinischen Schule des hallischen Waysenhauses Gelegenheit bekam, gelehret haben würde; bey einer Gesinnung, die mir nie erlaubt hat, irgend einer der mir zweckmäßig scheinenden Methoden volle Güte beyzulegen, so lange nicht vielfältige Versuche mich überzeugt hatten, daß dadurch Lust erweckt und befördert, und schnell, fest und ganz daje-

benswürdigen Seite zeigen, wenn sie als ältere Tochter der reinen Vernunft mit schnöder Ver-

nige gefaßt werde, was man darnach behandele; und endlich bey allen diesen von meinem zwanzigsten Jahre an, um nicht weiter zurückzugehen, und insbesondere seit zwölf Jahren in einer Lage, die ich mir für meine Absichten, meine Neigungen und Wünsche, hätte mir unter mehreren die Wahl freygestanden, nicht besser hätte wählen können; es müßte, sage ich, für mich in keinem Stücke Gewißheit möglich seyn, wenn ich mich in Ansehung dessen, was ich über den Zustand der Mathematik laut gesagt habe, und was vorzüglich die Methode betrifft, auf einen ganz falschen Weg verirrt, und meinen Irrthum unter den Umständen, unter welchen ich mich befunden, nie gemerkt haben sollte. Aber zweyerley muß natürlich, da ich mich darüber eben so deutlich erklärt habe, nicht aus der Acht gelassen werden; erstlich der Gesichtspunkt, aus und nach welchem ich urtheile: **Wenn das Studium der Mathematik denjenigen, die sich ihr widmen, allen daraus möglichen formellen Nutzen gewähren soll**; und zweytens, daß ich bey aller Festigkeit und Unerschütterlichkeit in dem, was ich einmal nach untrüglichen Regeln als gewiß und gut erkannt habe, dennoch dadurch meine Brust aller darge-

achtung auf ihre jüngere Schwester herab blicken wollte.

botenen Belehrung offen erhalte, daß ich bey jedem Einwurfe, der mir gemacht wird, von der Frage ausgehe: Wie wenn er gegründet wäre? und denselben nicht eher verlasse, als bis ich entweder einen Standpunkt gefunden, in welchem ich ihn selbst machen würde, oder darnach meine Einsichten verbessert habe. Auf diese Art kann denn auch bey mir nie die Entfernung von den Meynungen anderer die Hochachtung mindern, welche ich einmal gegen sie gefaßt habe; und daher rührt es ebenfalls, daß ich, wenn ich anders denke, solches nicht verhehle, so wie auch, daß mich Widerspruch aus Gründen schwerlich je zu einer Bitterkeit verleiten wird, die ich mir bey Machtsprüchen sogar vorsetzlich erlaube, aber nie suche. Und nun bey dieser Gelegenheit vorläufig noch ein Paar Worte über die Kantische Philosophie und insbesondre über die Critik der reinen Vernunft.

Es sey Hrn. Kants Philosophie alt oder neu, und letzteres entweder ganz oder zum Theil; das Verdienst, welches sich der liebenswürdige Greis dadurch erworben hat, und welches künftig wegen der Folgen, die jetzt noch nicht da seyn können, im hellern Lichte erblickt werden wird, ist auch in

meinen Augen groß, ob ich gleich dem Studium seiner Schriften, weil die Mathematik als Wissenschaft, woran mich Amt und Neigung knüpft, den größten Theil meiner Zeit fordert, nur zerstreute Stunden widmen kann. Was darin über Mathematik gesagt wird, ist ein offenbarer Beweis, daß Hr. Kant das Wesen der Mathematik kenne; und schon deswegen kann und muß die Critik der reinen Vernunft auch jedem Mathematiker schäzbar seyn. Hr. Kant verweiset selbst darin die jüngere Tochter der reinen Vernunft, die Philosophie, auf ihre ältere Schwester, die Mathematik; und nimmt man hierzu, daß er bis in sein vierzigstes Jahr mathematische Vorlesungen gehalten, und nun erst den philosophischen Nachforschungen allein sich gewidmet, so wie auch das, daß er mehrern seiner fähigsten Schüler das sorgfältigste Studium der Muthematik nicht bloß empfohlen, sondern zu einer ausdrücklichen Pflicht gemacht hat; Umstände, die bekannt sind, und wovon ich außerdem besondere Beweise habe: so ist klar, wie Mathematiker von der Critik der reinen Vernunft urtheilen müssen, um nach ihres Urhebers Sinn darüber zu reden. Wenn Hrn. Kants Schriften selbst manchen von seinen Verehrern schwer sind: so frägt sich, ob diese dazu alle die Vorerkenntnisse gebracht haben, welche dazu wegen der Stelle, welche

Kantische Philosophie in der Reihe der menschlichen Erkenntnisse einnimmt, erfordert werden? Wenn andere darin eine Menge Unvollkommenheiten wahrnehmen, so ist Hr. Kant gewiß unter allen am weitesten entfernt, zu glauben, daß auf dem von ihm betretenen wahren Wege nicht noch weiter fortgegangen werden könne. Oder sollte bescheidenes Selbstgefühl, was mit wirklichen Verdiensten durch ein natürliches Band verknüpft ist, nicht erlauben, denjenigen mit Kraft zurückzuweisen, der zum Nachfolger zu stolz, zum Führer zu schwach, und dieses mit der Zeit aus jenem zu werden zu ungeschmeidig ist? Aber daß man in den Wissenschaften oft das selbst für verworren und mangelhaft halte, was man nur aus einem falschen Standpunkte als dergleichen erblickt, ist auch bekannt; und was für Widerspruch und Tadel die fruchtbarsten Entdeckungen und tief gegründete Theorien, ehe sie allgemeinen Eingang finden, erfahren können, und wie der Ruhm der Widersacher bey der Nachwelt sey, braucht man keinem zu sagen, dem die Geschichte der gründlichsten aller Wissenschaften Newtons und Leibnitzens Beyspiel vor Augen stellt. Und vielleicht wäre es besser, wenn die Schüler des Greises, der seinen Weg fortsetzt um zum Ziele zu gelangen, und nicht zum Anfange zurückkehren kann um die ersten Schritte zu leiten, die Mittel be-

kannt machten, welche man brauchen muß, um nicht durch eingesogene Vorurtheile, oder, welches wohl noch häufiger der Fall seyn mögte, durch den Mangel an den erforderlichen Vorerkenntnissen der Gefahr ausgesetzt zu seyn, aus einer lebendigen Quelle Wasser mit einem Siebe zu schöpfen, und Schlamm statt eines erquickenden Tranks zu erhalten. Ob übrigens meine allerdings sehr große, und ich darf hinzusetzen, unwandelbare Hochachtung für Hrn. Kant mich zu einem blinden Bewunderer seiner Schriften gemacht habe, und ob ich z. B. fähig sey, seine Sätze in der Mathematik so zu mißbrauchen, als Hr. Schübler in seinem Versuche, der Einrichtung unsers Erkenntnißvermögens durch Algeber nachzuspühren, an vielen Orten gethan hat? darüber mag man theils nach folgender Probe eines Lehrbuchs der Mathematik für Schulen, theils nach den bey der weiterhin vorkommenden Anzeige der Anfangsgründe der reinen Mathesis vom Hrn. Hofprediger und Professor Schulz geäußerten Grundsätzen ein Urtheil fällen.

(Die Fortsetz. in einem der folgenden Stücke.)

II.

Erste Probe
eines
Lehrbuchs der Mathematik
für Schulen.

Vorerinnerung.

Wenn das Studium der Mathematik Jünglingen den Nutzen gewähren soll, welchen ich im ersten Stücke dieser Beyträge S. 47 in der Anmerkung angegeben habe: so ist es ein Hauptverforderniß, daß sie vom Lehrer zur Erfindung derselben geleitet werden; und soll dieses geschehen, so muß der Lehrer die Gedankenreihe kennen, bey welcher sich die Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und Sätze, welche zusammengenommen die Mathematik ausmachen, in einer leichten, natürlichen Ordnung und so dar-

bieten, daß ihre Unabhängigkeit von der Erfahrung einleuchtend sey. Nun sollte es zwar Niemanden schwer fallen, jene Gedankenreihe selbst zu finden, theils weil sie eine natürliche Gedankenreihe ist, theils weil dabey fast alles auf den festen Vorsatz ankommt, nichts von der Erfahrung anzunehmen und nirgends bey verworrenen Vorstellungen stehen zu bleiben. Allein je leichter uns das Natürliche erscheint, wenn es einmal gefunden ist, desto schwerer ist es meistens, dasselbe selbst zu finden. Ich halte es daher nicht für überflüssig, ein Lehrbuch der Mathematik zu versuchen, welches jene Gedankenreihe darstelle, und lege davon gegenwärtig den Kennern die erste Probe vor. Eine Unvollkommenheit scheint vielleicht darnach von einem solchen Lehrbuche unzertrennlich zu seyn, nemlich der Fehler einer am Ende ermüdenden Weitläuftigkeit, und ich gestehe es gern, daß selbst ich diesen Fehler für einen Hauptmangel erkennen würde. Allein die Ausführlichkeit, welche im Anfange nöthig ist, macht bald einer auf keinem andern Wege erreichbaren Kürze Platz, und Ausführlichkeit im Anfange lockt eher an, als daß sie abschrecke. Uebrigens begleite ich hier

die vorgelegten Proben mit Anmerkungen, welche im Lehrbuche selbst wegfallen, wo außerdem das hier durch Häkgen Abgesonderte mit kleinern Lettern gesetzt werden wird, um die (anfänglich insgesammt in den Euclideischen Elementen befindlichen) Compendien-Sätze von den Gedanken abzusondern, wodurch jene Theile eines continuirlichen Ganzen werden.

Euclides Elemente,

für

den gegenwärtigen Zustand der Mathematik

bearbeitet, erweitert und fortgesetzt.

Erste Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Erstes Buch.

I. Erklärungen.

„1. Die Mathematik ist, nicht eine Wissen-
„schaft sondern, die Wissenschaft; das heißt,
„der Inbegriff alles dessen, was wir ohne Bey-
„hülfe der Erfahrung wissen können.“ *)

*) Ich weiß es, daß man dieser Beschreibung den Vorwurf eines zu weiten Umfanges machen kann, habe aber gleichwohl kein Bedenken getragen, von ihr auszugehen. Der Schüler der Mathematik

Man muß also, wenn man die Mathematik auf die ihrer Natur gemäße Art lernen will, während

bringt zu dieser Wissenschaft eine Summe von Erfahrungserkenntnissen mit, und bloß an sinnlichen Objecten und von denselben abgezogenen Begriffen hat er bis jetzt sein Erkenntnißvermögen geübt. Nun soll er alle seine Erfahrungserkenntnisse bey Seite legen und einen neuen Weg betreten. Die Richtung, welche seine Aufmerksamkeit dazu bekommen muß, ist das Werk des Lehrers, und vom Anfang an nothwendig; und mich dünkt, daß dieser ihr dieselbe auf eine sehr leiche Art und bald gebe, wenn er von jener Beschreibung ausgeht. Hierzu kommt, daß der Schüler dabey zum voraus den Unterschied des Weges, welchen ihm sein Lehrer zeigt, von den bisher gegangenen empfinden kann; wo also der Reiz der Neuheit Lernbegierde erwecken wird. Wird zugleich auf die erworbenen Erfahrungserkenntnisse zurückgeblickt, und die Unvollständigkeit und Ungewißheit derselben betrachtet, wobey Hrn. Villaume's praktische Logik für junge Leute, die nicht studiren wollen, benutzt werden kann; so läßt sich verschiedenes über die Nothwendigkeit solcher Erkenntnisse, die nicht von der Erfahrung abhängig sind, beybringen, und die Wissenschaft, welche erlernt werden soll, als Bedürfniß für jeden,

während dieses Bestrebens alles weglassen, was dem es um gründliche, vollständige und gewisse Erkenntniß zu thun ist, darstellen. Einer solchen Vorbereitung wegen dürfte man doch wohl einen kleinen Gebrauch von dem Sprüchworte machen, welches die Worte mit Münzen vergleicht? Und hatte derjenige, der die Benennung Mathematik anders stempelte, dazu ein solches Recht, daß jede Umprägung ein strafbares Verbrechen wäre? Montucla sagt in seiner Histoire des Mathématiques, daß man zwar einmüthig behaupte, die Mathematik habe ihren Namen der Achtung zu verdanken, in welcher sie bey den Alten gestanden, und daß insbesondere die Gewißheit, welche in ihren Lehren herrscht, dazu Gelegenheit gegeben habe, daß man aber gleichwohl ausdrückliche Zeugnisse darüber in den Werken der Alten vergebens suche. Fabricius hat in seinen Anmerkungen vor dem Buche des Sextus Empiricus adversus Mathematicos in seiner Ausgabe der Werke dieses Philosophen, Leipzig 1718, die verschiedenen Bedeutungen des Worts Mathematik angeführt, aber auch hier findet man nichts von der Art, daß man bey dem Gebrauche dieser Benennung schlechterdings an eine bereits festgesetzte Bedeutung gebunden wäre. Und dann bedeutet ja Mathematik, etymologisch genommen, den Inbegriff alles dessen, was ge-

in die Sinne fällt, oder alles, wovon man

lernt werden kann, und was wir aus und durch Erfahrung wissen wollen, müssen wir empfinden und aus Empfindungen schöpfen. „Aber auf diese Art werden Mathematik und Philosophie nicht von einander getrennt.“ Ist das jetzt schon nöthig? und wenn es erst in der Folge nothwendig wird, kann es nicht bis dahin verschoben bleiben? „Dann lieber den Ausdruck reine Vernunftwissenschaft gebraucht.“ Der ist für Schüler, die erst Mathematik anfangen, zu schwer. „Also Hrn. Kants Definition der Mathematik in solche Worte eingekleidet, daß sie solchen Schülern faßlich seyn kann.“ Dann müßte doch der Constructionen gedacht werden, wenn auch gleich nicht unter diesem Namen? Aber noch hat der Schüler keine Construction gehabt, und man müßte ihm also einen Begriff davon beyzubringen suchen, ohne Anschauungen zu haben, worauf man ihn gründen könnte, und Begriffe ohne Anschauungen sind leer. Und wenn die obige Beschreibung zu weit seyn soll, so frage ich, ob nicht dagegen vielleicht Hrn. Kants Erklärung zu enge sey? Es läßt sich reine Vernunftwissenschaft denken aus Constructionen; dabey dienen die Erklärungen bloß zur Beförderung der Deutlichkeit der Erkenntniß; bewiesen wird aus ihnen nicht; dies ist Elementar-Mathematik. Ferner giebt es reine Ver-

sich irgend vorzustellen im Stande ist, daß es nicht da seyn könne *).

„So bleibt außer dem, was in uns denkt, „nichts übrig, als der Raum, den wir an„schauend uns vorstellen, nicht denken **); als

nunftwissenschaft vermittelst Constructionen aus Begriffen; hier wird aus Begriffen bewiesen, und die Constructionen erleichtern nur die Untersuchung; dies ist allgemeine Mathematik. Daß die Philosophie reine Vernunftwissenschaft aus Begriffen ohne Construction sey, ist bekannt. So viel jetzt, das Uebrige in der Fortsetzung des zweyten Aufsatzes des zweyten Stücks dieser Beyträge, welche im fünften folgen wird.

*) Für solche, die noch weiter keine Gegenstände, als sinnliche, untersucht haben, ist dieser Zusatz wohl genau genug; andern könnte er vielleicht zum Theil unbestimmt scheinen.

**) Wir können uns den unbegrenzten Raum, der übrig bleibt, wenn wir aus unsern Erfahrungsbegriffen alles weglassen, was wir weglassen können, nicht anders als einig vorstellen, und wenn wir von vielen Räumen reden, so verstehen wir darunter nur Theile eines und desselben alleinigen Raumes. Dies will die Redensart sagen: Wir stellen uns den unbegrenzten Raum anschauend vor; und sie ist passend, weil bey Vor-

„unbegrenzt uns vorstellen, nicht als unendlich, „oder man müßte dieses Wort in seiner etymo„logischen Bedeutung nehmen wollen." *)

„Aber bloße Anschauungen befriedigen un„sere Denkkraft nicht, am wenigsten Anschauun„gen des Unbegrenzten. Und wodurch sollten „wir die Theile des unbegrenzten Raums deut-

stellungen von solchen Dingen, die wir uns als einig vorstellen, diese Dinge gleichsam vor dem Auge unsers Geistes stehen, und von ihm angeschaut werden. Wollten wir uns den Raum denken, so müßten wir uns denselben, welches wir nicht können, in Vergleichung mit andern Dingen vorzustellen und unsere Vorstellung davon durch diese Dinge deutlich zu machen im Stande seyn. Bey einiger Gabe der Herablassung wird ein Lehrer dieses auch Anfängern in der Mathematik deutlich zu machen vermögen.

*) Wir sind nicht vermögend, uns den Raum so groß vorzustellen, daß wir ihn nicht in Gedanken noch ferner sollten vergrößern können. Unendlichkeit also, wobey wir uns den Raum so groß vorstellten, daß kein größerer möglich wäre, fällt hier gänzlich weg; dergleichen Unendliches sind wir nicht fähig anzuschauen. Wenn sich der Schüler der Mathematik dieses an dem gegenwärtigen Orte merkt, wird es ihm in der Folge

„lich von einander unterscheiden? Also ist der „unbegrenzte Raum eigentlich nur das Feld, „nicht der Gegenstand der Mathematik *), und „wir sind gezwungen, weil deutliche Vorstel-

möglich seyn, die verworrenen Theorien mancher Mathematiker vom Unendlichen anzunehmen? Das reine Land zur rechten Zeit mit guten Samen besäet! wo dieser liegt, kann kein Same des Unkrauts hinfallen. In der Verstandes-Welt ist sogar die Regel unumgänglich nöthig, daß man seinen Samen früh säen, und auch des Abends die Hand nicht ablassen solle.

*) Ich will nicht bestimmen, ob ich hier das Wort Feld genau so gebraucht habe, als Hr. Kant in der Critik der Urtheilskraft, Einleitung, S. XVI., unpassend scheint es mir nicht gesetzt zu seyn. Uebrigens ist es ein Gleichnißausdruck, und es folgt aus der Rechtmäßigkeit seines Gebrauchs nicht sogleich das Recht, auch den Satz hier anzuwenden: daß man die physische Beschaffenheit des Landes kennen müsse, welches man seiner Natur gemäß besäen oder bepflanzen will. Es könnte vielleicht Berufung auf den Fall statt finden, daß bisweilen die Wahl des Samens auf andere Art bestimmt werde.

„lungen für unsere Seele Bedürfniß sind, darin „vom Einfachen auszugehen.“ *)

2. Punkt ist, was keine Theile hat.

„Aber auch bloß ausgehen können wir vom „Punkte, nicht dabey verweilen; denn daß „man keinen Punkt mit den Sinnen oder der „Einbildungskraft erreichen könne, bietet sich „bey einigem Nachdenken von selbst dar, so „wie auch, daß wir uns den Punkt denken „können, wo und so oftmals wir wollen. Eben „deswegen ist es uns ferner möglich, in dem „unbegrenzten Raume so viel Punkte zu den„ken, als es irgend beliebt; aber je mehr wir „uns denken, desto zusammengesetzter und ver„worrener wird die Vorstellung, die wir dabey „haben. So wird es nothwendig, stufenweise „von einem Punkte zu mehrern fortzugehen. **)

*) So bietet sich die erste von den drey Bedingungen dar, unter und durch welche die ganze reine Mathematik erfunden werden kann. Man sehe hierbey in der folgenden Anzeige der Schulzischen Anfangsgründe der reinen Mathesis die Stelle nach, welche ausführlicher von diesem Gegenstande redet.

**) Die andere Bedingung von dieser Art.

„Wollen wir uns außer dem Punkte, von „welchem wir ausgehen, noch einen denken, „so kann solches entweder so geschehen, daß wir „uns diesen nicht eben da vorstellen, wo wir „jenen annehmen, oder so, daß der andere „eben da gedacht werde; und eben dieses ist bey „mehr als zwey Punkten möglich. Im ersten „Falle können wir uns beyde oder alle zugleich, „im andern nur nach und nach vorstellen, oder „sie schwinden in einen zusammen. Auf „diese Weise zeigt sich eine doppelte Art, das „Feld der Mathematik zu bebauen, durch Geo„metrie und Arithmetik." *)

„Wir können uns keine zwey Punkte außer „einander vorstellen, ohne dabey das zu geden„ken, was zwischen denselben liegt. Dies ist

*) So wie sich hier die beyden Haupttheile der Mathematik darbieten, so thun solches in der Folge auch alle ihnen untergeordnete. Unbedeutend ist dabey das auf keine Weise, daß man auf diesem Wege die Theile der Mathematik nie eher kennen lernt, als bis diese Kenntniß nothwendig wird; daß man immer erst einen Total-Begriff bekommt, der je länger je mehr entwickelt wird,

„eine bloße Länge. Genau genommen liegt „zwischen zwey angenommenen Punkten, was „durch dieselben vollkommen bestimmt wird, „und dieses ist die Linie, welche sich von dem „einen jener Punkte zu dem andern in einerley „Richtung fort erstreckt.“

3. Linie heißt, was bloß lang ist.

4. Gerade nennt man die Linie, welche sich von jedem der beyden sie bestimmenden Punkte zu dem andern in einerley Richtung fort erstreckt.

„Wir sind nicht im Stande, uns irgend zwey „Punkte, die nicht in einen zusammen schwin„den sollen, anders als so zu denken, daß da„durch eine zwischen ihnen liegende gerade Linie „bestimmt werde. So wird es Forderung und

und am Ende nur volle Deutlichkeit erhält; daß man, wenn man einen oder den andern Weg besonders verfolgt, weiß, was für welche ungegangen zurückgelassen worden, u. d. gl.; am wichtigsten aber vielleicht das, daß man, so viele Theile man auch schon gefunden hat, doch immer weit mehr hofft, ferner noch andere zu entdecken, als sich je schmeichelte, ganz am Ende zu seyn.

„zwar Forderung im höchsten Sinne: Zwi-
„schen jeden zwey auf die angeführte Art ge-
„dachten Punkten eine gerade Linie sich vorzu-
„stellen. Aber in jeder geraden Linie kann man
„sich zwischen den sie bestimmenden Punkten
„unzählige andere (auch unendlich viele?) ge-
„denken, und daher bekommen jene den Namen
„gegebene Punkte. Hiernach läßt sich die er-
„wähnte Forderung auch auf diese Art ausdru-
„cken: Zwischen jeden zwey gegebenen Punkten
„eine gerade Linie zu gedenken.“ *)

„Durch zwey gegebene Punkte wird die zwi-
„schen ihnen liegende gerade Linie genau und
„völlig bestimmt, und die Vorstellung dieser
„geraden Linie giebt die Entfernung der gedach-
„ten Punkte. Ein gegebener Punkt und eine
„Entfernung desselben von einem andern, be-
„stimmen nicht eben so den andern Punkt; aber

*) Noch nicht zu ziehen; auf diese Art findet sie erst nach den Erklärungen, unmittelbar vor den Grundsätzen und Sätzen, ihren Platz. Uebrigens verdient bemerkt zu werden, daß es auf keine Art unsrer Willkühr frey stehe, ob wir dieser Forderung ein Genüge leisten wollen, oder nicht; wir sind schlechthin gezwungen, es zu thun.

„noch läßt sich nicht ganz entwickeln, worauf „diese beyden Dinge führen.“ *)

„Man denke sich zwey Punkte, die nicht „zusammenfallen, und die gerade Linie zwischen „ihnen nach dem Merkmale, daß sie sich von „jedem der beyden sie bestimmenden Punkte zu „dem andern in einerley Richtung fort erstrecke: „so wird die Möglichkeit erhellen, jede gegebene, d. h. durch zwey gegebene Punkte bestimmte gerade Linie nach Gefallen zu verlängern.“ **)

*) Freylich reichen diese beyden Stücke in der Folge hin, um dadurch zum Kreise und zur Kugel geführt zu werden. Aber zu jenem muß man vorher die unbegrenzte Ebene kennen gelernt haben, und zu diesem sich schon im Gebiete der Stereometrie befinden. Uebrigens gehört das hier Gesagte, so wie auch das sogleich Folgende, der Vollständigkeit der Betrachtung wegen, allerdings an den Ort, wo es steht; und es ist die dritte von den in der Anmerkung S. 214 gedachten Bedingungen: nirgends bey verworrenen und unvollständigen Kenntnissen stehen zu bleiben, wo es und so lange es nicht durchaus unvermeidlich ist.

**) Also bloß die erste Forderung sind wir zu erfüllen gezwungen, und schon bey der zweyten ist es

„Nach dieser Betrachtung dessen, worauf „zwey gegebene Punkte führen, bleibt für jetzt „nichts übrig, als zu drey gegebenen, das „heißt, einander nicht bestimmenden Punkten, „fortzugehen. Diese können nicht in Einer ge„raden Linie befindlich seyn, sonst wären es drey „in einer geraden Linie gegebene Punkte.“

„Stellen wir uns dergleichen vor, so den„ken wir uns dabey zugleich, und auch dieses „nothwendiger Weise, was dazwischen liegt „und dadurch bestimmt wird. Zwischen je „zweyen von drey gegebenen Punkten liegt eine „gerade Linie; und also ist das, was zwischen „drey gegebenen Punkten liegt, mit dem, was

unserm Willen überlassen, ob wir sie befolgen wollen, oder nicht? Zwingt etwa die Natur nur allenthalben zu dem ersten Schritte, und verlangt schon vom zweyten an, daß wir denselben nach erhaltenem Winke selbst gehen sollen? Aber wenn wir es nicht thun, so müssen die Schranken, welche wir bald auf unserm Wege antreffen, uns an unsere Unbedachtsamkeit erinnern; und je früher wir uns dieser schuldig gemacht haben, desto eher finden wir auch unsern Kräften ein Ziel gesetzt, da sie sonst ohne Ende und immer stärker sich wirksam beweisen können.

„zwischen den drey durch sie gegebenen geraden „Linien liegt, einerley. Dieses ist nicht bloß „lang, sondern auch breit.“

5. Fläche heißt, was bloß lang und breit ist.

„Aber in jeder von den zwischen je zweyen „der drey gegebenen Punkte befindlichen gera„den Linien kann man sich unzählige Punkte, „und zwischen je zweyen von diesen mehrfach „unzähligen Punkten wieder eine gerade Linie „denken, u. s. f. Genau und völlig bestimmt, „liegt also zwischen drey gegebenen Punkten die „Fläche, in der man zwischen jeden zwey Punk„ten eine gerade Linie sich denken kann, deren „Punkte insgesammt in jene Fläche fallen.“

6. Ebene Fläche oder Ebene heißt die Fläche, in welcher man zwischen jeden zwey darin angenommenen oder gegebenen Punkten eine gerade Linie sich denken kann, die ganz in dieser Fläche liegt.

„Jede gegebene gerade Linie kann nach Ge„fallen verlängert werden, und es thut dabey „nichts, ob diese Linie unmittelbar oder mittel„bar gegeben sey. Wendet man jetzt diese For„derung bey drey gegebenen Punkten und den „drey durch sie gegebenen geraden Linien an: so

„gelangt man dadurch zu der Vorstellung einer „unbegrenzten Ebene, welche, da sie den un„begrenzten Raum in zwey, von einer Seite „wenigstens, begrenzte Theile theilt, aber auch „bloß dieses thut, ein eingeschränkteres Feld „uns darbietet, nach dessen Bebauung wir erst „hoffen können, mit glücklichem Erfolge weiter „zu gehen."

„Von jetzt an stellen wir uns daher eine un„begrenzte Ebene vor, und denken uns alles, „was wir untersuchen werden, in ihr. Auf „diese Art gelangen wir zur ebenen Geometrie „oder Planimetrie."

„Auch diese unbegrenzte Ebene denken wir „uns nicht, sondern schauen sie an mit dem „Auge der Seele, und stellen sie uns als unbe„grenzt vor, aber nicht als unendlich; sollte „sie uns etwas anders seyn, als was sie uns „durch diese Anschauung ist? Auf diese Art sind „wir, aus eben den Gründen wie bey dem „unbegrenzten Raume, auch in der ebenen „Geometrie gezwungen vom Punkte aus„gehen."

„Ein Punkt in einer unbegrenzten Ebene „bietet uns nichts weiter dar, als was wir

„schon bey Einem Punkte im unbegrenzten „Raume gehabt haben.“

„Zwey Punkte führen hier zuerst auf alles „dasjenige wieder, was schon vorhin dagewe„sen ist *). Aber nehmen wir darauf einen „Punkt und eine Entfernung von einem andern „an: so können wir diesen zweyten Punkt bey „unveränderter Entfernung von dem ersten in „der unbegrenzten Ebene an verschiedenen Or„ten uns vorstellen. Auf diese Art haben wir „nicht mehr als zwey gegebene Punkte, selbst „wenn wir uns den zweyten an allen bey der „angenommenen Entfernung möglichen Orten „denken. Gehen wir daher auch hier stufen„weise, so gelangen wir, wenn wir den zwey„ten Punkt nicht mehr als zweymal nehmen, „zum ebenen Winkel, zum geradlinigen Winkel, „zur senkrechten Linie, zum rechten, stumpfen „und spitzen Winkel.“

*) Hier bietet sich sehr natürlich eine Gelegenheit zu einer Wiederholung des Vorhergehenden dar, die mehr Vortheile gewährt, als jede herbeygezogene. Und wie gut läßt sich bey dem Folgenden bemerken, daß unter andern Umständen wiederholte Untersuchungen, der Thätigkeit des Geistes mehr Stoff, sich wirksam zu beweisen, darreichen?

7. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer Linien gegen einander, die einer Ebene in einem Punkte zusammen kommen *).

8. Geradlinig heißt ein Winkel, wenn die Linien, welche ihn haben oder einschließen, gerade Linien sind.

Schenkel; Spitze oder Scheitel; Nebenwinkel **).

9. Wenn eine gerade Linie so auf einer andern steht, daß die Nebenwinkel gleich sind: so heißt sie darauf senkrecht.

*) Auf diese Art und in dieser Verbindung den ebenen Winkel erklärt, ist der Schüler der Mathematik wohl nicht gezwungen, die erhabenen Winkel, die er freylich jetzt noch nicht braucht, aus der Classe der Winkel auszustoßen, oder vielmehr, er wird dieselben in der Folge, wenn er sie braucht, ohne Anstoß als unter seine Erklärung gehörig kennen lernen und betrachten können.

**) Dies sind Namen. Erklärungen davon, in einem Lehrbuche, (bey der mündlichen Erklärung des Lehrbuchs müssen sie vorkommen) scheinen mir mit gewissen Noten unter lateinischen Autoren, für Schulen edirt, in eine Classe zu gehören, die aber von manchen Lehrern mit einer eben nicht rühmlichen Benennung belegt zu werden pflegen.

10. Ein rechter Winkel ist derjenige, der seinem Nebenwinkel gleich ist.

11. Stumpf heißt ein Winkel, wenn er größer ist als ein rechter.

12. Spitz wird ein Winkel genannt, wenn er kleiner ist als ein rechter.

„Stellen wir uns nunmehr den zweyten „Punkt allenthalben vor, wo er bey unveränderter Entfernung von dem gegebenen ersten „Punkte seyn kann: so erhalten wir eine begrenzte Ebene, und zwar von der Beschaffenheit, daß alle Punkte in der Begrenzung von „dem gedachten ersten Punkte gleich weit entfernt sind."

13. Eine ebene Figur ist eine von allen Seiten begrenzte Ebene.

Seiten; Umfang; Figur ohne Beywort.

14. Ein Kreis ist eine Figur, die von einer einzigen Linie dergestalt begrenzt wird, daß alle gerade Linien, die von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur nach jener Linie gezogen werden können, einander gleich sind *). Um=

*) Man gelangt also auf dem hier gegangenen Wege auf die Art zu der Erklärung des Kreises, daß

Umkreis; Mittelpunkt; Durchmesser; Halbmesser; Halbkreis.

„Wie groß oder wie klein die Entfernung „zwischen den beyden gegebenen Punkten sey, „darauf kommt hierbey nichts an; und es ist „daher in einer unbegrenzten Ebene, derglei-

dieselbe den von Hrn. Kant, Critik der reinen Vernunft, zweyte Auflage, S. 759, 760, gerügten Fehler nicht nur nicht hat, sondern selbst nicht einmal bekommen kann. Hrn. Kants Worte sind: „Mathematische Definitionen können niemals irren. Denn, weil der Begriff durch die Definition zuerst gegeben wird, so enthält er gerade nur das, was die Definition durch ihn gedacht haben will. Aber obgleich dem Inhalte nach nichts Unrichtiges darin vorkommen kann, so kann doch bisweilen, obzwar nur selten, in der Form (der Einkleidung) gefehlt werden, nemlich in Ansehung der Präcision. So hat die gemeine Erklärung der Kreislinie, daß sie eine krumme Linie sey, deren alle Punkte von einem einigen (dem Mittelpunkte) gleich weit abstehen, den Fehler, daß die Bestimmung krumm unnöthiger Weise eingeflossen ist. Denn es muß einen besondern Lehrsatz geben, der aus der Definition gefolgert wird und leicht bewiesen werden kann (es ist der 2te im 3ten Buche der Euclideischen

„chen jetzt unser Feld ist, möglich: Aus jedem „gegebenen Punkte mit jeder gegebenen geraden „Linie einen Kreis beschrieben zu gedenken."

„Sobald zwey Punkte gegeben sind, müssen „wir uns zwischen denselben, oder wir bleiben „bey dunkeln und unentwickelten Vorstellungen

Elemente) daß eine jede Linie, deren alle Punkte von einem einigen gleichweit abstehen, krumm (kein Theil von ihr gerade) sey." Daß aber der gedachte Fehler auf dem gegenwärtigen Wege ganz und gar nicht begangen werden könne, erhellet daraus, weil man darauf bis jetzt noch nicht das mindeste von der krummen Linie gelernt oder gefunden hat. Auf empirische Versuche will ich mich hier nicht berufen, sonst habe ich oft genug vorsätzlich dergleichen unter solchen Umständen angestellt, daß ich mich mit Recht auch auf sie beziehen könnte. Uebrigens scheint mir diese Beschaffenheit allerdings ein Kennzeichen zu seyn, daß die Richtung des Weges, welchen ich gehe, schwerlich ganz falsch seyn könne. Daß Ein Kennzeichen noch kein Recht zu einer das Ganze umfassenden Behauptung gebe, und daß man die rechte Richtung haben und dabey auf seinem Wege straucheln und fallen, auch aus Mangel an Kraft unvermögend seyn könne das Ziel wirklich zu erreichen, ist mir nicht unbekannt.

„stehen, eine gerade Linie denken; und haben „wir dieses gethan, so können wir nicht nur „die durch jene Punkte gegebene gerade Linie „nach Gefallen verlängern, sondern auch aus „jedem Endpunkte derselben mit ihr einen Kreis „beschrieben uns vorstellen; und auch dieses „wird für uns nothwendig, wenn wir das vor „uns liegende Feld wirklich anbauen wollen. „Verlassen wir daher auch jetzt noch nicht zwey „gegebene Punkte, sondern handeln, ehe wir „zu mehrern fortgehen, erst hiernach: so schafft „unsere Einbildungskraft nach und nach, was „Fig. 1 bis Fig. 5 dem Auge sich sinnlich dar„stellt, ohne dabey gleichwohl ihrer Wirksam„keit eine Grenze gesetzt zu finden. Ein auf„merksamer Blick darauf, mit Zurückerinne„rung an die dagewesenen Erklärungen, leitet, „wenn schon ohne ganz die Deutlichkeit, Ge„wißheit und Völligkeit zu gewähren, welche „bey den vorher gefundenen Gegenständen „statt fand, auf folgende Dinge nebst ihren „Erklärungen." *)

*) Der Zusatz: Ohne ganz die Deutlichkeit und Gewißheit zu gewähren, welche bey den vorher gefundenen Gegenständen statt fand; scheint mir

15. Geradlinige Figuren sind Figuren, die von geraden Linien eingeschlossen werden.

16. Ein Dreyeck ist eine dreyseitige.

17. Ein Viereck ist eine vierseitige.

18. Ein Vieleck ist eine mehr als vierseitige Figur.

19. Ein gleichseitiges Dreyeck ist, welches drey gleiche Seiten hat.

20. Ein gleichschenkliges Dreyeck ist, welches zwey gleiche Seiten hat.

Grundlinie; Spitze des gleichschenkligen Dreyecks.

21. Ein ungleichseitiges Dreyeck ist, welches drey ungleiche Seiten hat.

22. Rechtwinklig heißt ein Dreyeck, wenn darin ein rechter Winkel ist.

23. Stumpfwinklig, wenn darin ein Winkel stumpf ist.

24. Spitzwinklig, wenn darin alle drey Winkel spitz sind.

25. Ein Quadrat ist ein Viereck, welches gleichseitig und rechtwinklig ist.

wichtig zu seyn, zumal da seine Wahrheit sich desto stärker zu empfinden giebt, je weiter man in den nun folgenden Erklärungen fortgeht.

26. Ein Rechteck ist ein Viereck, welches rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist.

27. Ein Rhombus ist ein Viereck, welches gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist.

28. Ein Rhomboides ist ein Viereck, dessen Gegenseiten und Gegenwinkel gleich sind, das aber dabey weder gleichseitig noch rechtwinklig ist.

29. Jede andere vierseitige Figur heißt entweder Trapezium oder Trapezoides.

30. Gerade Linien in Einer Ebene, die nicht zusammenlaufen, so weit man sie auch auf beyden Seiten verlängern mag, heißen parallel *).

*) In einem Lehrbuche für Schüler gehört die Frage nicht an den gegenwärtigen Ort; was durch Erklärungen, wie die obigen, eigentlich geschehe? hier muß ich ein Paar Worte darüber hersetzen. Hr. Kant behauptet in der S. 225 mitgetheilten Stelle, daß in der Mathematik der Begriff durch die Definition zuerst gegeben werde, und von der Definition des Punktes und der Parallellinien ist dieses offenbar. Allein läßt sich eben dieses schlechthin auch von allen übrigen behaupten? Der Begriff der geraden Linie ist da, sobald man zwey Punkte annimmt, die außer einander

„Allein nun zwingt uns das Verlangen nach
„deutlichen und gewissen Vorstellungen, die
„gleichsam daliegende Masse, anstatt dieselbe
„durch weiter fortgesetzte Anhäufung in ein
„Chaos zu verwandeln, genau zu betrachten
„und sorgfältig zu entwickeln. Von Kindheit

befindlich sind; der Begriff der Ebene entsteht, wenn man sich drey Punkte dieser Art gedenkt: die Merkmale aber, welche in den von diesen Gegenständen gegebenen Erklärungen enthalten sind, bemerkt man erst hinterher; und eben so wie bey diesen Beyspielen verhält es sich bey den meisten der übrigen Erklärungen. Vielleicht hat man also nur von den Definitionen ein Recht zu behaupten, daß durch sie der Begriff erst gegeben werde, welche keine andere als bloß negative Merkmale enthalten, und muß den Endzweck der übrigen darauf einschränken, daß durch sie der vor ihnen schon gegebene Begriff deutlicher und der leichten Mittheilung durch Worte fähig gemacht werden solle? Ich will diese letztern positive und die erstern negative Erklärungen nennen. Bey einer genauern und weiter fortgeführten Untersuchung der Euclideischen Elemente findet sich, daß aus den negativen Erklärungen gefolgert, von den positiven hingegen meistens bloß der Gebrauch gemacht wird,

„an ans Sinnliche gewöhnt, wird dabey der
„Gebrauch sinnlicher Darstellungen für uns
„zum Bedürfniß. Aber bloß als Erleichte=
„rungsmittel der Untersuchung dürfen wir diese
„Darstellungen brauchen, oder wir erwerben
„uns, nicht mathematische Kenntnisse, sondern
„nur Kenntnisse von mathematischen Gegen=

daß sie bey der Construction der Begriffe gleich=sam als Handleiterinnen dienen. Was hätte auch, wenn jene muthmaßlich ausgedruckte Behauptung nicht gegründet wäre, Euclides für ein Recht gehabt, solche bey weitem nicht volle Deutlichkeit habende Erklärungen, als z. B. die 22ste, 23ste, 25—28ste sind, an den Ort zu setzen, wo sie in seinen Elementen stehen? Und was unstreitig noch wichtiger ist, wie kann durch eine positive Erklärung ein mathematischer Begriff erst gegeben werden, da sich jeder durch eine solche Erklärung bestimmter Begriff directe auf Anschauungen beziehen muß, wenn er nicht leer seyn soll, und durch jede reine Anschauung keine einzelne Vorstellung sondern ein Begriff erzeugt wird, der aber freylich öfters bloß klar ist? Uebrigens versteht es sich von selbst, daß von Erklärungen der Elementar=Mathematik die Rede sey, denn bloß diese, und zwar auch diese nur dem Anfange nach, finden wir im Euclides.

„ständen, die jenen Beynamen nicht verdie-
„nen. Damit solches allenthalben und ohne
„Gefahr der Selbsttäuschung geschehe, legen
„wir es uns als ein unverbrüchliches Gesetz
„auf, dabey bloß nach solchen Regeln zu ver-
„fahren, deren Rechtmäßigkeit nicht nur be-
„reits durch das Vorhergehende außer allem
„Zweifel gesetzt ist, sondern bey deren Befol-
„gung auch keine Erfahrung sich einmischen
„kann. Auf diese Art bekommen wir

II. Forderungen.

1. Von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.
2. Eine begrenzte gerade Linie in gleicher Richtung zu verlängern.
3. Aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

„Nach diesen Forderungen dürfen wir also
„handeln so oft wir wollen; wir müssen aber
„nur dann und so oft es wollen, als die ange-
„zeigte Absicht solches erfordert. Uebrigens
„sind alle sinnliche Darstellungen, welche wir
„nach denselben hervorbringen, nichts weiter
„als einzelne Beyspiele von den allgemeinen

„Objecten, welche wir uns denken; und es „kommt daher bey ihnen nichts von alle dem in „Betrachtung, was sie besonders und nicht mit „jenen Objecten gemeinschaftlich an sich haben.“

„Warum dürfen wir, denn es ist Ge„setz, fürs erste zu keiner Figur, welche wir „zeichnen wollen, mehr Instrumente als Lineal „und Zirkel brauchen?“

„Die dritte Forderung läßt sich in jedem „Falle, für den sie gehört, zweymal anwen„den. Da, wenn dieses geschieht, der zweyte „Kreis durch den Mittelpunkt des ersten Krei„ses, und, weil sein Mittelpunkt in dem Um„fange desselben ist, auch durch Punkte geht, „die außerhalb desselben liegen: so schneiden sich „die Umfänge beyder Kreise allemal wenigstens „in zweyen Punkten. Daß hierbey vorausge„setzt werde: Beyde Kreise seyen in Einer Ebe„ne, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.“

„Eben so muß jede gerade Linie, die durch „einen Punkt innerhalb und durch einen Punkt „außerhalb eines Kreises geht, den Umkreis „wenigstens in zweyen Punkten schneiden; da„gegen jede zwey gerade Linien, die nicht in „Eine zusammenfallen sollen, nicht mehr als

„einen Punkt mit einander gemein haben „können." *)

„Wendet man sich nun zur genauern Unter„suchung der durch die im Anfange stehenden „Erklärungen gegebenen Gegenstände, und „fängt dabey, um auch hier stufenweise zu ge„hen, von zwey Punkten und der durch sie be„stimmten geraden Linie an: so findet man bald „Gelegenheit, verschiedene allgemeine Sätze „zu bemerken, nach welchen in einzelnen Fällen „zu urtheilen wir uns nicht entbrechen können, „selbst wenn wir darauf zuvor gar nicht aufmerk„sam gemacht worden sind. Dergleichen Sätze „führen mit Recht den Namen Grundsätze, und „es ist allerdings sehr nützlich, sich dieselben „deutlich vorzustellen und geläufig zu machen."

*) Auf diesen Satz hätte man auch schon bey den Winkeln kommen können. Warum ich ihn hier erst anführe, so wie auch über die Gründe von manchen andern Dingen, die in den bisherigen Anmerkungen noch nicht erläutert sind, werde ich mich am Ende dieser ersten Probe erklären. Darf ich die Herren Recensenten bitten, bis dahin mit ihrem Urtheile zu verziehen?

(Das Uebrige von dieser ersten Probe im nächsten vierten Stücke.)

III. Nachrichten.

Von der Art und Weise, wie ich den im ersten Stücke mitgetheilten Plan meiner Lehrer-Beschäftigungen im Berlinischen Gymnasium auszuführen fortgefahren, rede ich diesmal nicht, weil ich es mit mehrern Nutzen werde thun können, wenn ich die vorstehende Probe zuvor ganz geliefert habe; und so enthält dieser Abschnitt bloß

Nachrichten von den neuesten mathematischen Schriften.

Fortsetzung der Anzeige der geometrischen Abhandlungen von Hrn. Hofr. Kästner, im 2ten Stücke S. 174 f.

Die erste Nummer enthält eine Nachricht von Gerbert's Geometrie, welche sich unter dem Titel: *Gerberti* postea *Sylvestri II* P. M. ord. S. Benedict. Geometria; eruta ex MS. Cod. inclyti Monasterii ad D. Petrum Salisburg. O. S. B. a P. Bernardo Pez. in der Sammlung The-

saurus Anecdotorum novissimus . . . Tomus III. a R. P. Bernardo Pezio . . . Augsp. 1721. fol. Part. II. p. 6. . . findet. Hr. Kästner sagt von dieser seiner Nachricht: Es habe ihm, da sich Gerbert's geometrische Werke in einer großen Sammlung befänden, welche meist andere Schriften als mathematische enthält, nützlich geschienen, dem Mathematiker davon eine Nachricht zu ertheilen. Man sähe daraus den Zustand der Geometrie in den Abendländern, am Ende des ersten Jahrtausend unsrer Zeitrechnung. Mir scheint ihr Nutzen sich weiter zu erstrecken, da Hr. Kästner nicht bloß Proben mittheilt, sondern auch die Beschaffenheit derselben mit dem ihm gewöhnlichen Scharfsinne entwickelt. So lehrt, um ein Paar Beyspiele herzusetzen, Gerbert Pythagorische rechtwinkliche Dreyecke finden durch folgende Regel: Cathetus ter ducatur nona pars inde auferatur, residui dimidium pro basi habeatur. Si eandem quam abstulisti nonam, inventae basi adjungis, hypotenusam habebis. Hr. Kästner fügt hinzu: d. h. $B = \frac{4}{3} C$; und $H = B + \frac{1}{3} C = \frac{5}{3} C$; also $C : B : H = 3 : 4 : 5$. Eine Probe, wie sich was Leichtes schwer einkleiden läßt. Man

verlangt wohl nicht mehr dergleichen Regeln zu lesen. — Im 55sten Cap. lehrt Gerbert: Quomodo trigonus, tetragonus, hexagonus, &c. aequilateri ſuas areas impleant; und behauptet unter andern: Omnis trigonus aequilaterus unum latus in ſe multiplicat, ipſum latus ad eam multiplicationem addit, horum dimidium ſumit et ſic aream ſuam implet. Desgleichen: Pentagonus, qui aequis continetur lateribus, ter multiplicationem unius lateris in ſe expoſtulat, et ex illius ſumma multiplicationis, ſemel aream diducere et reliqui medietatem ſumere. Hr. Käſtner ſetzt dazu: „Von eines geometriſchen Dreyecks Fläche iſt die Regel offenbar ungereimt, nach der ein Quadrat und eine Linie müſſen addirt werden. Aber es giebt Zahlen, die man Trigonalzahlen nennt, weil ſich ihre Einheiten in ein gleichſeitiges Dreyeck ſetzen laſſen. Dieſe Zahlen ſind die Summen der natürlichen Zahlen $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$; u. ſ. f. Nach der Regel arithmetiſche Reihen zu ſummiren iſt die Summe aller ganzen Zahlen von 1 . . . . bis mit n; $\frac{(n + 1) 2}{2}$ (im Buche durch einen Setzerfehler $\frac{(n H) n}{2}$) und heißt eine Tri-

gonalzahl, deren Seite n ist. Man kann nemlich so viel Einheiten so legen, daß sie ein Dreyeck bilden, auf dessen jeder Seite n Einheiten liegen, nur jede, welche im Winkel also zugleich in zwey Seiten liegt, einmal in der einen, das anderemal in der andern Seite gerechnet. Dieses arithmetische Dreyeck hält also $\frac{n^2 + n}{2}$ Einheiten, und davon gilt Gerberts Ausspruch. Den versteht G. aber in der That von der Fläche des geometrischen, wie sich in der Folge zeigen wird. — Eines geometrischen Quadrates Fläche wird bekanntermaßen durch die Quadratzahl, des Maßes seiner Seite gegeben. Und daher paßt G. Regel aream quadrati zu finden, auf Zahl und Figur. — — Unsinn ist die Regel von der Fläche des geometrischen Fünfecks. Man nennt aber eine Pentagonalzahl von der Seite n; die Summe von n Gliedern der arithmetischen Progression 1; 4; 7; 10; .... $1 + 3(n - 1)$. Diese Summe ist $\frac{3n^2 - n}{2}$; und nun ist offenbar, daß G. dieses hat sagen wollen." — Man hat also hier allerdings Ursache, in diesen und andern ähnlichen Fällen zu sagen: Hoc Gerbertus non belle; und Unrecht ist es

nicht, wenn man dann nach Horazens Beyspiele *) die Frage folgen läßt: Numquid ego illi imprudens olim faciam simile? Auch diejenigen, deren Auge sich eben nicht am Kleide der Dinge stößt, sind unzufrieden, wenn sie das Leichte ohne Noth schwer eingekleidet finden, und noch vielmehr müssen es diejenigen seyn, welche den gedachten Fehler an sich haben. Wenn Gerbert manches Leichte schwer ausgedruckt hat, so lag die Ursache bey ihm in eingeschränkter Kenntniß; man kann aber auch bey ausgebreiteten Einsichten in eben den Fehler verfallen, wenn man den Ort, wo der Gegenstand hin gehört, nicht genau bestimmt vor Augen hat, und Ausdrücke braucht, die bey aller ihrer sonstigen Güte demselben für diesen Ort nicht angemessen sind. Schwer würde es nicht seyn, (und es soll in der Folge geschehen, jetzt habe ich den Platz nicht dazu) aus mathematischen Schriften unsers Jahrhunderts, und selbst aus einigen von der letzten Messe, eine Menge von Beyspielen aufzustellen, die das Gerbertsche so-

*) In der vierten Satyre des ersten Buchs, gegen das Ende.

gar weit hinter sich zurücklassen; und es ist die Frage: Ob nicht darin eine von den Hauptursachen zu suchen sey, warum die Mathematik von vielen, denen sie doch so heilsam seyn würde, nicht bloß vernachlässiget, sondern selbst verachtet wird. Daß ich hierbey keine Erleichterung in Gedanken habe, wodurch der Gründlichkeit zu nahe getreten wird, darf ich hoffentlich voraussetzen, da ich erst kürzlich ausdrücklich gesagt habe, möglich größte Gründlichkeit sey, so paradox es auch klingen möge, gerade das sicherste Mittel, die Mathematik selbst Kindern angenehm und leicht zu machen. Es scheint mir also durch dasjenige, was Hr. Kästner über die Gerbertsche Stelle anmerkt, worauf sich dieses bezieht, die wichtige Frage veranlaßt werden zu können: Durch was für Mittel Mathematiker sich vor den Fehler bewahren können, schwerer von den Gegenständen ihrer Wissenschaft zu reden, als es die Natur und die Würde derselben verlangt? Was ferner Gerberts Verwechselung der Polygonalzahlen und der Polygone betrifft, so sind wir am Ende des achtzehnten Jahrhunderts freylich schwerlich fähig, uns einer solchen Verwechselung in solchen

solchen Fällen schuldig zu machen. Aber wenn Gerbert dabey durch Mangel an Bestimmung etwas finden zu können glaubte, was sich nicht finden läßt: so sind wir vielleicht an andern Orten in dem Falle, daß wir wegen unrecht angebrachter Bestimmung manches nicht finden können, was sich sehr wohl finden ließe. Und denn wäre es doch auch unstreitig keine unbillige Forderung, wenn man verlangte, daß nun nach gerade die Theorie der Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie so aufs Reine gebracht seyn sollte, daß man in jedem einzelnen Falle schon vor dieser Anwendung mit Gewißheit wissen könnte, wo und wie man dabey auf offenbare Ungereimtheiten und Unsinn, und wo und bey was für einem Verfahren man dagegen auf Wahrheit kommen werde? Hr. Kästner hat die Ungereimtheit der Gerbertschen Behauptungen von dem regulären Dreyecke, Fünfecke u. d. gl. so zu sagen a posteriori gezeigt, und daher sieht man wohl, daß Gerberts Regel aream quadrati zu finden, auf Zahl und Figur passe, aber nicht warum diese allein passe und die übrigen unpassend sind und seyn müssen. Der Schluß dieses ersten Aufsatzes ist folgender:

„Gerbert nachdem Pabst Sylvester II. ward für einen Hexenmeister gehalten, und man hat das Mährchrn mit vielen Umständen ausgeschmückt, die der deutsche Protestant in Anton Gavin Passe part tout de l'Église Romaine, oder: Dietrich, dessen sich die Römische Kirche statt der Schlüssel Petri bedient, lesen kann, IIter Theil, Cöln 1778, 84 Seite. . . Denn es wäre über die Würde der Sache einen wichtigern Gewährsmann aufzusuchen. Gerberts Freunde geben wohl mit Recht seine Einsichten in die Mathematik als Veranlassung dieser Beschuldigung an. Jetzt würde er deswegen für keinen Hexenmeister gehalten.

Der zweyte Aufsatz enthält ein Beyspiel, wie man individuelle Fälle zur Erfindung allgemeiner Aufgaben benutzen kann. Gualter Hermin Rivius giebt in seiner Baukunst (Basel 1582) unter den mancherley Vortheil und Behendigkeit des Zirkels und Richtscheids, XXXIII Blatt, auch das an: Es komme dem fleißigen Architecto ein Bret oder Bort für, zehn Schuh lang, und drey breit. Nun soll er ein Thürlein machen, sieben Schuh hoch und vier breit. Hr. Kästner nimmt davon Gelegenheit zu der

Aufgabe her: Ein langes und schmales Bret so zu zerschneiden, daß sich mit den Theilen desselben eine kürzere aber breitere Oeffnung verschließen läßt. Der Vortheil, der mit solchen Verallgemeinerungen verbunden zu seyn pflegt, wird auch hier sichtbar. Man bekommt dadurch nicht bloß eine allgemeine Regel, sondern entdeckt auch das Fehlerhafte, welches häufig bey bloß individuell behandelten Fällen unvermeidlich ist. Zugleich lernt man aus den hinzugefügten historischen Bemerkungen, daß das Nachbeten in der Mathematik nicht minder als in andern Wissenschaften üblich ist. Wenn Hr. Kästner von einer Spötterey, wozu Gaspar Schott durch einen unmathematischen Fehler, den mehrere bey dieser Aufgabe begangen haben, veranlaßt wurde, urtheilt: sie hätte immer den Nutzen haben können, Praktikern sinnlich zu machen, wie unentbehrlich ihnen mathematische Theorie sey: so sind vielleicht folgende Gedanken eines Praktikers nicht ganz ungegründet. „Diejenigen Praktiker, die das nöthig hätten, daß ihnen die Unentbehrlichkeit der mathematischen Theorien sinnlich gemacht würde, wären keine Praktiker, sondern Handlanger von Praktikern.

Die Theoretiker thäten Unrecht daran, wenn sie den Praktikern Geringschätzung der Theorie vorwürfen; es verkennten diese den Werth der Theorie nicht, und bewiesen solches auch dadurch, daß sie die Erlernung derselben jedem ihrer Eleven zur Pflicht machten. Aber das wäre eine unbillige Forderung, daß Praktiker die theoretische Mathematik gerade so lernen sollten, als man dieselbe brauche, um sie nach einem einmal eingeführten Schlendrian *) vorzutragen. Es sey bey der theoretischen Mathematik nicht selten der Fall, wie bey der künstlichen Logik; es sey alles sehr wahr, nur vieles nicht sehr brauchbar in Geschäften. Die Theoretiker sollten sich nur als solche betrachten, die dem Künstler die nöthigen Werkzeuge lieferten. Wenn diese weiter nichts thun wollten, als die Theile dieser Werkzeuge fabrikenmäßig verfertigen, ohne sie zu dem Ganzen zusammen zu setzen, was Künstler verlangten: so würden sie ebenfalls wenig Abnehmer finden.

Der dritte Aufsatz lehrt ein Rechteck finden, dessen Hälfte dem ganzen ähnlich ist. Nennt

*) Ich muß bitten, mich hier bloß als Referenten zu betrachten.

man die größere Seite des gegebenen Rechtecks a, und die kleinere b, so muß b $= \frac{1}{2}a . \sqrt{2}$ seyn. Wenn die Aufgabe für die Rechnung aufgelöset werden soll, so ist diese Bestimmung allerdings die beste; soll aber b durch Zeichnung gefunden werden, so ist die vorhergehende Formel $a : b = b : \frac{1}{2} a$ dazu viel bequemer, indem daraus sogleich in die Augen fällt, daß man nur die mittlere Proportional-Linie zwischen der größern Seite des gegebenen Rechtecks und ihrer Hälfte suchen dürfe, welches leicht ist, und auf verschiedene Arten geschehen kann. Uebrigens ließe sich diese Aufgabe auch noch weiter führen, als es Hr. Kästner gethan hat. So ist das Rechteck, welches ein Viertel des ganzen und dem ganzen ähnlich ist, ein anderer specieller Fall, der mit dem betrachteten in eine Classe gehört.

Der vierte Aufsatz handelt von paradoxen (ebenen) Dreyecken, nach Bettin Apiaria philosophiae mathematicae (Tom. I. Bon. 1645; fol.) Apiar. III. Progymn. 6. Prop. 14; p. 73, wo die Verzeichnung des ersten gelehrt wird, nemlich eines Dreyecks, davon zwey Winkel zusammen

zwey rechte ausmachen und alle drey zusammen nicht mehr als zwey rechte. Hr. Kästner hat noch andere hinzugefügt; ein Dreyeck, das drey rechte Winkel hat; ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Winkel an der Spitze ein rechter ist, und alle drey Winkel zusammen nicht mehr als einen rechten ausmachen; ein gleichseitiges Dreyeck, dessen drey Winkel zusammen so viel als nichts betragen. — Es gehört vielleicht mit zu der Größe des formellen Nutzens, welchen das Studium der Mathematik gewähren kann, daß diese Wissenschaft an dergleichen Beyspielen offenbar vor Augen stellt, wie man durch Gewöhnung nur nach deutlichen Vorstellungen zu urtheilen und die bloß klaren zu vernachlässigen, dahin komme, daß man Behauptungen auffallend findet, die im Grunde nichts weiter als falsch sind. Wer den 16ten Satz des dritten Buchs des Euclides vor Augen hat, wird alle jene Dreyecke für bloße Wortspiele erklären; dessen nicht einmal zu gedenken, daß der Satz: in jedem Dreyecke sind alle drey Winkel zusammen zweyen rechten gleich, und jede zwey Winkel zusammen kleiner als zwey rechte; bloß von den geradlinigen Dreyecken bewiesen worden ist, und

es also ganz und gar nicht befremdend seyn kann, wenn es sich bey andern als geradlinigen Dreyecken anders verhält. Wenn die Größe der Winkel durch Zahlen ausgedruckt werden soll, so ist allerdings der Winkel des Halbkreises, im Euclideischen Verstande genommen, ein rechter Winkel, und sein Complement = 0; aber lassen sich die Winkel nicht auch unmittelbar in Constructionen darstellen und unter einander vergleichen?

(Die Fortsetzung künftig.)

Königsberg, bey Hartung. Anfangsgründe der reinen Mathesis, von Johann Schulz, Königl. Hofpr. und ordentlichem Professor der Mathematik. 1790, 520 S. gr. 8. 1 rthl. 12 gr.

Ich eile ein Werk anzuzeigen, auf welches die Versicherung seines Urhebers — daß es die Frucht eines mühsamen Nachdenkens vieler Jahre sey, und daß es schon lange sein Bestreben gewesen, die Elemente der reinen Größenlehre in ein solches System zu bringen, wie es theils die Natur und die erhabene Würde dieser Wissenschaft, theils das Bedürfniß unsers cri-

tisch-philosophischen Zeitalters erfordere — zumal bey dem anerkannten Werthe der von eben diesem verdienten Gelehrten herrührenden Erläuterung und Prüfung der Kantischen Critik der reinen Vernunft — nothwendiger Weise aufmerksam machen muß. Dabey habe ich Grund zu zweifeln, ob dasselbe für irgend einen Liebhaber der mathematischen Wissenschaften den Grad der Wichtigkeit haben könne, den es für mich hat und haben muß. Was und wie seit zwanzig Jahren mein Bestreben in dem Felde der Mathematik gewesen, so wie auch, was ich für ein Lehrbuch unter dem Titel: Euclides Elemente, für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik bearbeitet, erweitert und fortgesetzt, zu liefern versuchen werde; habe ich in meiner Vorrede zu der Uebersetzung des ersten Theils der Eulerischen Differenzial-Rechnung S. XXVI—XXXVII gesagt, und in diesen Bogen bereits die erste Probe des Lehrbuchs zur Prüfung vorgelegt. Jetzt treffe ich mit Hrn. Schulz an einem Orte zusammen, so daß es mir aus mehrern Gründen wahrscheinlich ist, daß unsere Wege von verschiedenen Punkten ausgehen, und nach einem kurzen Zusammen-

treffen uns je länger je mehr von einander entfernen werden. Es betrifft eine Wissenschaft, welche in Ansehung der Sachen nicht nöthig hat, durch Ueberredung Beyfall zu entlocken, sondern denselben erzwingen kann, und welcher, ihre Natur reiflich erwogen, auch nicht mehr als Eine Methode zugeschrieben werden darf. Bey diesen Umständen muß es vielleicht sogar befremden, wenn Hr. Schulz und ich nicht selten einander gerade entgegen stehen, und die Folge zeigen wird, daß ich, wenn gleich nach andern, doch gewiß nicht weniger wohl erwogenen Gründen urtheile und handele, als ich, beym Gefühl wahrer Hochachtung wegen seiner längst erworbenen Verdienste, Hrn. Schulz aus Ueberzeugung beylege.

Der selige Sulzer sagt in seiner Untersuchung über den Ursprung der angenehmen und unangenehmen Empfindungen (der ersten in der Leipzig 1773 herausgekommenen Sammlung seiner vermischten philosophischen Schriften) S. 75, daß die sanften Vergnügungen des Verstandes der Seele Stille und Ruhe ertheilen, und keine Leidenschaften erwecken, welche sie zu strafwürdigen Handlungen erniedrigten; und wo ich

nicht irre, urtheilt Hr. Kästner in seiner Schrift, De eo, quod studium Matheseos facit ad virtutem, daß die Beschäftigung mit der Mathematik durch das reine Vergnügen, welches sie in dem Anschauen der Wahrheit unserm Geiste verschafft, denselben unfähig mache, aus der unlautern Quelle der gröbern sinnlichen Freuden zu schöpfen. Tadelsucht, die an der Ehre verdienter Männer nagt, mag immerhin manchem Vergnügen gewähren; zu der sanften und feinern Art gehört dies Vergnügen nicht. Ich hoffe, man werde Mathematikern zutrauen, daß sie lieber reines Quellwasser trinken als aus Sümpfen schöpfen.

Aber auch den Weg, auf welchem Gewißheit erlangt und Streit vermieden wird, müssen Mathematiker kennen. Also fange ich von der Untersuchung der Frage an:

Was für ein System fordert theils die Natur und die erhabene Würde der Mathematik, theils das Bedürfniß unsers critisch-philosophischen Zeitalters?

Vielleicht läßt sich darauf nicht passender und kürzer antworten, als wenn man sagt: *Ein solches, wobey sich die Mathematik vom An-*

fang an und ununterbrochen als von aller Erfahrung unabhängig, am meisten zwar dem strengen Forscher, aber auch deutlich schon jedem aufmerksamen Beobachter zeige. Daß dieses ein nothwendiges Erforderniß sey, darüber ist kein Streit zu erwarten, wohl aber über die Frage: Ob dieses Kennzeichen zulänglich, und ob ein System der Mathematik, welches sich durchaus durch dasselbe auszeichne, möglich sey?

Gut wäre es nicht, wenn mehrere Kennzeichen erfordert würden. Denn wenn sich unsere Aufmerksamkeit auf mehrere Dinge zugleich richten soll, so kann sie es nicht anders als getheilt thun, und was dann unser Geist findet, ist immer bald mehr bald weniger einseitig, nie völlig. Doch man hat nicht nöthig, hierbey stehen zu bleiben. Ist die Mathematik eine von aller Erfahrung unabhängige Wissenschaft, so sind nicht nur die Gegenstände, mit welchen sie sich beschäftiget, sondern auch die Regeln, nach welchen sie dieselben untersucht, mithin nicht weniger die Ordnung, in welcher die untersuchten Gegenstände und die davon zu behauptenden Sätze auf einander folgen müssen, nebst der rechten Art ihrer Darstellung, in der Natur unsers

Geistes gegründet; und sollte, was aus dieser Diamantgrube genommen wird, durch die schleifende Hand des Künstlers eine größere Vollkommenheit erhalten können, da dieselbe bloß Gestalten geben kann, wozu sie in der Natur die Muster vorfindet? Was die Möglichkeit eines Systems betrifft, welches durchaus das angeführte Kennzeichen an sich trage, so frage ich:

Würde man den mindesten Grund haben, dieselbe zu bestreiten, wenn sich zeigen ließe, daß es dabey lediglich auf folgende Bedingungen ankomme?

1. Nach Wegdenkung alles dessen, was in die Sinne fällt, in dem zurückbleibenden Raume vom Punkte, als von dem was keine Theile hat, auszugehen.
2. Von diesem Einfachen nicht anders als stufenweise, und so viel als möglich continuirlich, zum Zusammengesetzten fortzuschreiten.
3. Nirgends bey verworrenen und unvollständigen Kenntnissen stehen zu bleiben, als so lange und so fern dasselbe unvermeidlich ist.

Bejahet man diese Frage, so getraue ich mir die Möglichkeit eines Systems der Mathematik von der beschriebenen Art zu behaupten, und setze dieselbe so lange als ausgemacht voraus, bis Widerspruch oder andere Umstände eine ausführlichere Erklärung darüber rathen werden.

Aber würde dadurch auch denjenigen ein Genüge geschehen, was das Bedürfniß unsers critisch-philosophischen Zeitalters erfordert?

Wenn ich hier davon anfangen wollte, daß das Bedürfniß unsers critisch-philosophischen Zeitalters doch wohl nicht erfordere, daß man, um eine genügliche Antwort auf die Frage zu geben: Warum zwey zu einander zu addirende oder von einander zu subtrahirende Brüche zuvor unter Eine Benennung gebracht werden müssen? auf das oberste Princip alles Verstandes-Gebrauchs, auf die synthetische Einheit der Apperception zurückzugehe *): so würde ich es Niemanden verdenken, wenn er mich zu denen rechnen wollte, deren Auge sich am Kleide der Dinge stößt; und nicht gelernt haben, was

*) Man sehe Hrn. Schüblers Versuch der Einrichtung unsers Erkenntnißvermögens durch Algeber nachzuspühren, Leipzig 1788, S. 78, 79.

Anwendung und Gebrauch selbst des Besten am unrechten Orte für Phänomene hervorbringen können. Aber wenn man felsenfeste Hochachtung in seiner Brust fühlt, darf man gleichfalls auch wohl kein Bedenken tragen, sich der Grenzlinie zu nähern, jenseits, aber auch erst jenseits welcher auf dem Boden der Unwissenheit durch Eigendünkel hervorgetriebener Stolz seinen Sitz hat, und freymüthig sprechen, wenn man nicht als Lehrer sondern als ein solcher auftritt, der aufrichtig sagen soll, was ihm nach reiflicher Ueberlegung scheine. Wie also, wenn alles dasjenige, was wir rein anzuschauen vermögend sind, in das Gebiet der Mathematik gehörte, und der Philosophie dagegen bloß die reinen Begriffe angewiesen wären? und wie es mir scheint, so habe ich Hrn. Kant auf meiner Seite. Da Begriffe ohne Anschauungen leer sind, aller unserer Erkenntniß ohne Anschauung die Objecte fehlen und sie alsdann völlig leer bleibt, (Critik der reinen Vernunft, zweyte Auflage, S. 75, 87): was wäre eine Philosophie, was selbst die vor ihr hergehende Critik, ohne Mathematik? Zugegeben, daß ein Grund durch das auf ihm aufgeführte Gebäude, wenn

die Last desselben seine Steine, freylich kann das immer nur wenig seyn, einander noch näher bringt, gewinne; so beträchtlich wird man doch wohl diesen Gewinn nicht halten, daß dadurch erst der Grund zu einem Grunde werde? Aber daß die Festigkeit des Gebäudes von der Beschaffenheit des Grundes abhange, ist nicht bloß den Bauverständigen bekannt; und so scheinet es mir nicht kühne, sondern nothwendige Behauptung, daß ein System der Mathematik vor der Philosophie und vor der Critik vorhergehen müsse, und daß jezt, da der Tiefgrabende eine neue Quelle entdeckt und eröffnet hat, deswegen ein vollkommenes System der Mathematik mehr als jemals wünschenswerth ja nothwendig sey, um aus dieser Quelle auch neben und nach ihrem Erfinder zu schöpfen.

Besitzen wir bereits ein solches System?

Welches ist die eigentliche Quelle der unseligen Streitigkeiten über Raum und Zeit, und welches das Mittel, diese Quelle bis auf den Grund versiegend zu machen? Auf was für einem Wege läßt sich die allgemeine Logik, welche nach Hrn. Kant (Critik der Vernunft, S. 85) bloß ein

Canon zur Beurtheilung ist, zu einem Organon zur wirklichen Hervorbringung von objectiven Behauptungen erheben? Wodurch kann man das Auge seines Geistes schärfen, daß demselben die widerstreitenden Argumente der Antinomien der reinen Vernunft erscheinen als nicht aus der Sache Natur gezogen? — Dies sind einige von den Fragen, bey weiten nicht die wichtigsten, deren Beantwortung bey einem vollkommenen Systeme der Mathematik leicht seyn muß, und darnach wäre nun die, ob wir ein solches System bereits besitzen, ebenfalls nicht schwer auszumachen.

Euclides Elemente, oder Hrn. Kästners Anfangsgründe müßten es enthalten, wenn es schon da seyn sollte. Nach der Absicht beurtheilt, welche Hr. Kästner gehabt hat, unterschreibe ich auch hier mit Ueberzeugung das Urtheil, welches ich zuletzt in meiner Anleitung zur Selbsterlernung der Geometrie in Briefen über seine Anfangsgründe gefällt habe; ich habe sie unübertreflich genannt. Aber aus eben so vielen und eben so durchdachten Gründen setze ich hinzu, daß sie die Lücke, von der ich gesprochen, nicht ausfüllen. Was Euclides Elemente

betrifft,

betrifft, so haben Abschreiber, Uebersetzer, Exegeten, Commentatoren, Dogmatiker keine Unwahrheit hineinbringen können und keine heraus *); und es scheint mir auch aus diesem Grunde, daß Euclides den wahren Weg getroffen habe, daß man aber keinen Commentar vom Clavius darüber lesen müsse, um, welches allerdings noch übrig ist, diesen Weg fortzusetzen.

Um nach diesen vorläufigen Betrachtungen auf Hrn. Schulz Anfangsgründe der reinen Mathesis selbst zu kommen, so könnte der Zusatz, welchen der Hr. V. seinen sonstigen Verdiensten dadurch gegeben hat, selbst dann nicht unbeträchtlich genannt werden, wenn dasselbe auch nur Veranlassung zu neuen Versuchen würde; ich hoffe indeß, aller meiner Abweichungen von Hrn. Schulz ungeachtet, am Ende zu zeigen, daß mehr dadurch bewirkt werden könne. Erwünschters wüßte ich übrigens nichts, was mir zu Theil werden könnte, als daß man meinen Versuch Euclideischer Elemente der gesammten Mathematik mit eben der Schärfe und Strenge aber auch mit eben der Gesinnung und

*) Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie, für das Jahr 1781, S. 372.

Wahrheitsliebe prüfte, die ich bey der gegenwärtigen Mittheilung meiner Gedanken bewiesen haben werde.

Die Prolegomena zur gesammten Mathematik handeln I. vom Object der Mathematik und ihren verschiedenen Theilen, §. 1—26; II. vom Nutzen der Mathematik, §. 27, 28; III. von der mathematischen Methode, §. 29—42. Der erste Abschnitt fängt von Namen-Erklärungen der Wörter verschieden, einerley, gleichartig, ungleichartig, Qualität, Quantität, Quantum oder eine Größe an, und geht §. 6 zur Erklärung der Mathematik überhaupt, und §. 7 zur Erklärung der reinen und angewandten Mathematik insbesondere fort. Jene ist: Die Mathesis oder Mathematik heißt die Wissenschaft der Größen (Scientia quantorum); diese: Derjenige Theil der Mathesis, der von allen wirklichen Gegenständen abstrahirt, heißt die reine (pura); derjenige, der sich mit wirklichen Gegenständen beschäftiget, die angewandte Mathesis (applicata).

Bey den Namen-Erklärungen §. 1—5 halte ich mich nicht auf, ob sich gleich zeigen ließe, daß sie theils überflüssig, theils an unrechten

Ort gesetzt, theils durch unschickliche Beyspiele erläutert sind. Aber wenn die Mathematik durch die Wissenschaft der Größen erklärt wird, so hat bereits Hr. Kant gezeigt, daß dadurch kein wesentliches Unterscheidungs-Merkmal dieser Wissenschaft angegeben, und die Wirkung für die Ursache genommen wird *). Was ferner die reine Mathematik betrifft, so abstrahirt nicht diese Wissenschaft von allen wirklichen Gegenständen, sondern der, der sie erfinden oder erlernen will, muß solches vor der Ausführung dieses Vorsatzes thun. Dies gründet sich darauf, weil die Mathematik reine Vernunftwissenschaft seyn soll. Auch beschäftiget sich die angewandte Mathematik keinesweges mit wirklichen Objecten, dies thut die praktische, sondern nur mit Begriffen, die von wirklichen Gegenständen abgezogen und so beschaffen sind, daß sich die Lehren der reinen Mathematik darauf anwenden lassen.

Der 8te und 9te § sind zu wichtig, als daß ich sie nicht, ihrer Länge ungeachtet, ganz her-

*) Critik der reinen Vernunft, zweyte Auflage, S. 742.

setzen sollte. Sie lauten: Derjenige Theil der reinen Mathesis, der allgemein die möglichen Verknüpfungen des Gleichartigen untersucht, durch welche ein Quantum als Quantum überhaupt erzeugt werden kann, folglich von der verschiedenen Qualität der Quantorum gänzlich abstrahirt, heißt die allgemeine Größenlehre (mathesis universalis), derjenige hingegen, welcher Quanta von gegebener Qualität zum Objecte hat, die besondere (mathesis specialis). Jene ist also die Grundlage sowohl von dieser als der ganzen angewandten Mathesis. — Die allgemeinsten Arten von möglicher Erzeugung eines Quanti sind die, daß man es entweder aus verschiedenen gleichartigen Quantis zusammensetzt, oder von diesen eins oder mehrere wegnimmt, z. B. wenn man zu einem Quanto Getreide ein anderes Quantum oder mehrere hinzuschüttet, und daraus ein Quantum macht, oder wenn man von diesem eins oder mehrere wegnimmt, und daraus das übrig bleibende Quantum erzeugt, d. i. allgemeine Addition und Subtraction. Also machen diese beyden Arten von Verknüpfung die Mathesin universalissimam aus. Allein hierdurch wird das Quan-

tum noch nicht als Quantum, d. i. in Ansehung seiner Quantität bestimmt, sondern diese fordert die Bestimmung, wie vielmal eben dasselbe Gleichartige mit sich selbst verknüpft werden muß, um das Quantum zu erzeugen. Die Bestimmung des Wievielmal ist aber nur durch eine Zahl möglich. Also beruhen außer der allgemeinen Addition und Subtraction alle übrige Größenerzeugungen auf Zahlen. Da aber jede Zahl wieder ein Quantum ist, das aus Zahlen erzeugt wird; so besteht die allgemeine Größenlehre außer der allgemeinen Addition und Subtraction bloß in der Zahlenwissenschaft oder Arithmetik.

Muß man nicht, um hiervon anzufangen, die Armuth der deutschen Sprache bejammern, daß man, um sich klar und bestimmt auszudrucken, der lateinischen sogar die Wörter universalis, specialis, Quantum, Quantitas, Qualitas, letztere nach Horazens Rath parce detorta, abborgen muß? oder fordert es die Natur und die erhabene Würde der Mathematik, daß man in einem Lehrbuche dieser Wissenschaft lateinische Ausdrücke finde, die nichts mehr oder besser sagen, als übliche Namen aus derjenigen Spra-

che, in welcher das Lehrbuch verfaßt ist? Ferner hätte ich auch wohl einiges wider den Schluß des 9ten § einzuwenden, und behauptete z. B. außer der allgemeinen Addition und Subtraction gern eine allgemeine Multiplication. Allein in der Anmerkung zum 41sten § finde ich: „Ein Pferd durch ein Pferd multiplicirt giebt einen Walfisch, und in der beym 113ten §: Wenn man 2 Rthlr. durch 2 Rthlr. multiplizirt, so bekommt man zum Produkte 4 goldene Hufeisen; und das scheint, übersetzt, so viel heißen zu sollen, als: Eine allgemeine Multiplication behaupten ist Unsinn. Indeß es sey gewagt!

Wenn die Mathematik, definirt, die Wissenschaft der Größen wäre, und Hr. Schulz die Größe §. 4 und 5 so definirt hätte, daß dabey der §. 31 von den Definitionen stehende Satz volle Anwendung litte: so mögte meinetwegen die allgemeine Mathematik in noch engere Grenzen eingeschlossen werden. Allein wozu dann ein neues Lehrbuch nach dem Kästnerischen, dessen V. nicht bloß, wie s'Gravesande vor seiner Introduction in die Philosophie, sagt: nihil autem magis naturale est, quam unicuique sua placere; et propriam sequi, quam alius methodo

me adstringere, malui, und noch weniger für solche schreibt, die nicht eben so gut die Kästnerischen Anfangsgründe brauchen könnten? Und soll ich dem Erläuterer und Prüfer der Kantischen Critik der reinen Vernunft beweisen, daß die gedachten Definitionen zu enge sind? Ich weiß nicht, ob jemand den formellen Nutzen der Mathematik weiter ausgedehnt habe als ich, und ich hoffe ihn künftig noch größer und selbst von einigen bisher ganz unbekannten Seiten darzustellen. Hat Hr. Schulz Recht, so unterschreibe ich, ohne alle Einschränkung, was Hr. Rehberg im Januar 1789 der Berlinischen Monatsschrift, nicht zum Nachtheile der Mathematik, aber warlich auch nicht zur Ehre eines großen Theils der Mathematiker gesagt hat. Uebrigens wird wohl dagegen nichts zu erinnern seyn, wenn ich einen Machtspruch meist auch bloß durch etwas ähnliches beantworte.

Vom 10ten § an folgt die weitere Eintheilung der Mathematik nebst den dazu nöthigen Eintheilungen der Größen. So viel sich hier natürlich von Hrn. Schulz erwarten ließ, so wenig findet man etwas, was sich von dem

längst gewöhnlichen zu seinem Vortheile unterschiede. Ich zeichne einiges aus.

Im 12ten § wird die intensive Größe durch diejenige erklärt, deren Gleichartiges nicht außer einander ist, und die daher nicht durch Zusammensetzung desselben erzeugt werden kann, sondern als eine Einheit gedacht werden muß, die auf eine stetige Art bis auf Nichts abnehmen kann. Ich muß aufrichtig gestehen, daß ich unter meinen Regeln von der Eintheilung der Begriffe keine finden kann, nach welcher sich diese intensive Größe als eine Unterart der § 4 und 5 erklärten Größe darstellen ließe. Außerdem scheint es mir sehr gut gethan zu seyn, daß die Einheit in dem Vorhergehenden noch nicht erklärt ist, ob man es gleich vielleicht erwarten könnte, da man das Wort verschieden und ähnliche in besondern §§ erklärt antrifft. Eine Einheit, die auf eine stetige Art bis auf nichts abnehmen kann? Ich leugne nicht, daß mir die bloße Benennung intensive Größe viel deutlicher ist.

Nach § 13 sollen Raum und Zeit die Gegenstände der besondern Größenlehre, dabey aber

gleichwohl für die Zeit kein eigenthümlicher Theil nöthig seyn, weil sich dieselbe durch eine gerade Linie darstellen läßt. Auf diese Art ist es sehr natürlich, daß Hr. Schulz der reinen Mechanik mit keinem Worte als eines Theils der reinen Mathematik gedacht hat, denn die Wirkungen der Kräfte lassen sich durch Linien darstellen. Und daß Raum und Zeit als Gegenstände der reinen Mathematik angesehen werden, ist, um das rechte Wort zu brauchen, Nachbeterey.

Im 17ten § steht unter andern, daß die ganze Welt ein Object der angewandten Mathematik sey; ich glaube es wäre gut, wenn hinzugesetzt worden wäre, daß es sehr traurig um unsere Weltkenntniß stehen würde, wenn wir dieselbe bloß aus und durch die angewandte Mathematik hätten.

Nach dem 20sten § sind die gemeine und höhere Mathematik so von einander unterschieden, wie zwey Theile eines Zimmers, welches man durch eine Bretterwand getheilt hat. Eben so erinnert die nach §. 22 von den Mathematikern ganz bestimmt gezogene Grenzlinie zwischen der gemeinen und höhern Geometrie an das genaue Verfahren gemeiner Feldmesser.

Nach dem 26sten § ist es nicht mehr bloße rednerische Blume, daß die Mathematik das Unzählbare zähle und das Unermeßliche messe, sondern das Gebiet der Mathematik läßt sich nicht nur bis zum Unendlichen, sondern bis zum absoluten Maximum erweitern. Gleichwohl soll nach §. 25 die Analysis des Unendlichen richtiger die höhere Analysis heißen, und die Analysis besonders die höhere der Gipfel der reinen Mathematik seyn. Noch zur Zeit muß ich bekennen, daß ich das nicht wohl mit einander vereinigen kann.

Was im zweyten Abschnitte in zweyen §§ von dem Nutzen der Mathematik gesagt ist, übergehe ich. Um der Schwachen willen muß freylich in Prolegomenen auch des Nutzens gedacht werden, welchen die vorzutragende Wissenschaft hat oder haben kann. Ob das mit wirklichem Nutzen geschehe? ist eine Frage, die wenigstens hier nicht untersucht zu werden braucht.

Was im dritten Abschnitte §. 29—42 über die mathematische Methode gesagt wird, ist denjenigen vollkommen bekannt, die Hrn. Kästners Anfangsgründe und Hrn. Kants Critik der reinen Vernunft gelesen haben, und ich verweile

daher auch bey diesem Abschnitte nicht, zumal da ich in der Folge eine bequemere Gelegenheit haben werde, meine Gedanken darüber mitzutheilen. Ich wende mich zu den Anfangsgründen der allgemeinen Mathesis, die unter diese beyden Haupttitel gebracht sind: die allgemeinsten Arten von Größenverknüpfungen; und: die Arithmetik. Unter jenem Titel kommt vor: Von der Aehnlichkeit, Gleichheit und Congruenz; vom Ganzen und den Theilen, vom Größern und Kleinern; von der Einheit und Menge, vom Endlichen und Unendlichen; von der Addition und Subtraction der Größen überhaupt; von den Rational- und Irrational-Größen; vom Messen der Größen; Erklärung der Zahl und der gezählten Größe. Die Arithmetik faßt acht Abschnitte in sich: Von den ganzen Zahlen; von den Brüchen: von den Zahlen überhaupt; von einstimmigen und entgegengesetzten Größen und Zahlen; von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen; von den Verhältnissen und Proportionen; von den Progressionen; von den Logarithmen.

Bey den Erklärungen, Postulaten, Axiomen und Lehrsätzen des ersten Hauptstücks trifft

man verschiedene Abweichungen vom Gewöhnlichen an, und es ist daher Pflicht, eine sorgfältige Prüfung anzustellen. Ich setze von jeden zuvörderst einige Beyspiele her. Die dritte Erklärung heißt: Wenn man sich mehrere Dinge, die an sich betrachtet, vollkommen einerley sind, zu gleicher Zeit an eben demselben Orte des Raums vorstellt; so sagt man: sie sind ein und eben dasselbe Ding, oder nicht mehr als eins ein einziges (eadem *numero*, unicum). Die zwölfte: Das Einmalnehmen eines Quanti a heißt seine Einheit, sein unbestimmtes Etlichemalnehmen die Menge desselben. Wenn dieses Wiederholen irgend einmal aufhört, d. i. völlig begrenzt ist; so heißt die Menge endlich. Soll sie dagegen niemals aufhören; so heißt sie unendlich. Das erste Postulat ist: Mehrere gegebene gleichartige Quanta durch ihr successives Zusammennehmen in ein Quantum, d. i. in ein Ganzes zu verwandeln. Das zweyte: Jedes gegebene Quantum in Gedanken ohne Ende zu vermehren und zu vermindern. Axiome sind: Die Quantität der Summe ist einerley, man mag zu dem ersten gegebenen Quanto das andere, oder zum andern das erste addiren, d. i.

es ist allemal $a + b = b + a$; z. B. $5 + 3 = 3 + 5$; und: Die Quantität der Summe ist einerley, man mag zu einem gegebenen Quanto ein anderes entweder auf einmal ganz, oder jeden seiner Theile nach und nach einzeln addiren, d. i. es ist allemal $c + (a + b) = (c + a) + b = c + a + b$. Unter den Lehrsätzen steht folgender zuerst: Wenn ein Theil b des Ganzen $b + a$ entweder seinem Nebentheile a gleich, oder dieser ein endlichvielster Theil von jenem ist; so ist jeder von den Theilen kleiner als das Ganze und das Ganze größer als jeder seiner Theile. Der zweyte und dritte heißen: Wenn man bey gleichartigen endlichen Größen zum Größern und Kleinern Gleiches addirt; so ist die erste Summe größer als die andere, d. i. wenn $a > b$ ist, so ist $a + c > b + c$; wenn man bey gleichartigen endlichen Größen zum Größern mehr addirt, als zum Kleinern; so ist die erste Summe größer als die andere, d. i. wenn $a > b$, und $c > d$ ist; so ist $a + c > b + d$. Endlich mag auch die dem 16ten §, welcher den ersten Lehrsatz enthält, beygefügte Anmerkung hier stehen. Der Satz: das Ganze ist größer als der Theil, ist in Ansehung endlicher Größen so einleuchtend, daß man ihn von jeher als ein Axiom ausgeführt hat, das keines Beweises bedarf. Allein da sich der Grund seiner Gewiß-

heit noch zeigen läßt; so halte ich es für Pflicht, ihn zu zeigen, und daher den Satz als Lehrsatz zu demonstriren, und zwar um so mehr, da man sich gewöhnlich vorstellt, daß derselbe nicht nur von allen endlichen, sondern auch allgemein von allen unendlichen Größen gelten müsse. Daß aber das letztere unrichtig ist, und daß beym Unendlichgroßen jeder Theil, dessen Nebentheil nur ein unendlichvielster Theil von ihm ist, dem Ganzen gleich sey, habe ich in meinem Versuche einer genauen Theorie des Unendlichen ausführlich und strenge erwiesen. Dagegen ist nun aus der eben gegebenen Demonstration des ersten Lehrsatzes klar, daß der Satz: das Ganze ist größer als sein Theil, nicht bloß von allen endlichen Größen allgemein, sondern auch von demjenigen Theile eines unendlichen Ganzen, dessen Nebentheil entweder ihm gleich, oder ein endlichvielster Theil von ihm ist, jedesmal ungezweifelt gewiß ist. Wer ihn aber noch weiter ausdehnen wollte, dem würde es obliegen, seine Befugniß dazu erst zu beweisen. Daß übrigens Euclides den Satz: das Ganze ist größer als sein Theil, als ein ganz allgemeines Axiom ohne alle Einschränkung aufgestellt hat, darüber wird sich wohl niemand wundern, der sich erinnert, daß Euclides unter einer Größe gar keine andere, als eine endliche verstand. Da aber heut zu Tage die allgemeine

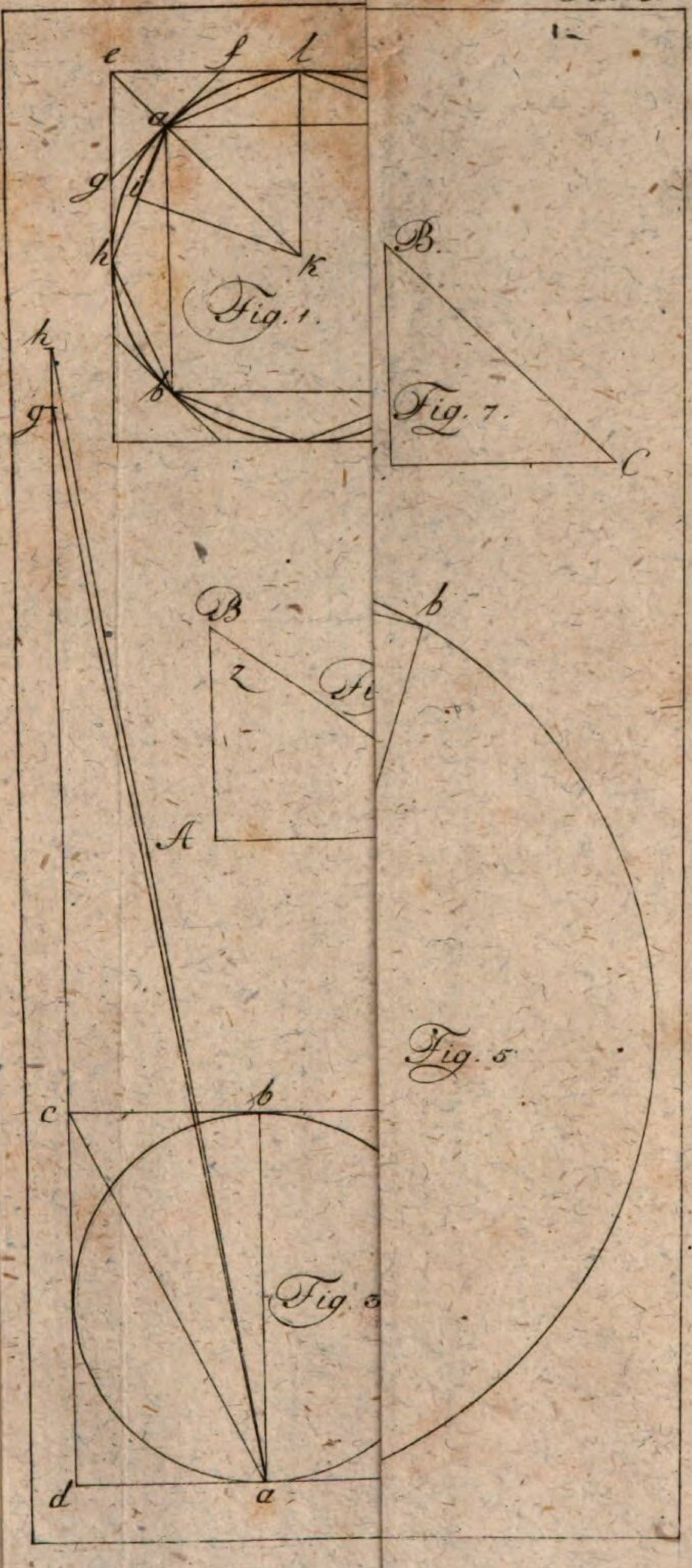
Mathesis sich auf alle mögliche endliche und unendliche Größen beziehen soll; so ist diese Einschränkung jetzt schlechterdings nöthig.

Ich will es Niemanden verdenken, wenn er mir wegen der Ausführlichkeit und Genauigkeit dieser Anzeige Nebenabsichten beymißt, zumal da der Ton in einigen über die Prolegomena beygebrachten Anmerkungen stärker ist, als er bey völliger Gleichgültigkeit gegen die Sache seyn würde. Man warte indeß das Ende ab und urtheile erst dann über mich und meine Bewegungsgründe.

Es ist mir selbst auffallend, daß ich in Ansehung dessen, was der Hr. V. über die allgemeinsten Arten der Größenverknüpfungen gesagt hat, demselben noch weniger meinen Beyfall geben kann, als bey dem aus den Prolegomenen angeführten, und dabey doch die Grundsätze und Regeln, nach welchen er, besage der Vorrede, gearbeitet hat, durchaus mit voller Ueberzeugung unterschreibe. Diese sind: In einer Wissenschaft, die ganz demonstrirt seyn soll, muß die Demonstration mit aller Strenge so weit verfolgt werden, als es nur möglich ist. Das Auge hat hier keine Stimme. Ein Satz scheine noch so sehr schon an sich klar, so lange sich noch ein höherer Grund seiner Richtigkeit denken läßt, muß er aufgesucht und angezeigt werden. Dieses ist nicht Pedanterie, oder eitele Parade, sondern unnachlaßliches Erforderniß, wofern die Kennt-

niß der mathematischen Sätze nicht bloßer Mechanismus, sondern wirkliche Einsicht heißen soll. Ferner: Eine gleiche Sorgfalt schien mir die Berichtigung der Grundbegriffe zu heischen. Denn wie nachtheilig jede Verwirrung in diesen für die Wissenschaft ist, liegt klar am Tage. — Es ist ein Haupterforderniß für ein Lehrbuch der reinen Mathematik, die Grundlehren so vollständig zu liefern, daß der Fortschritt zur angewandten und höhern Mathematik dem Anfänger durch keinen Mangel an den nöthigen Prämissen erschweret werde. — Es muß eine der vorzüglichsten Bemühungen seyn, und es ist zugleich die schwerste, die Materien in ihrer wahren natürlichen Ordnung vorzutragen. — Wer ist im Stande, wider diese Grundsätze und Regeln das mindeste einzuwenden? Und wenn ein Schriftsteller dergleichen in der Vorrede als die seinigen hinsetzt, und man genöthigt ist, wenn man nicht wider seine eigene Ueberzeugung und mit Hintansetzung der Wichtigkeit der Sache urtheilen will, zu sagen: daß durch das ganze Werk hindurch nichts weniger als wirkliche Befolgung jener Grundsätze und Regeln sich zeige: so ist das warlich eine der unangenehmsten Lagen, in welcher ein Recensent seyn kann.

(Die Fortsetzung im nächsten Stücke.)


e
f
l
a
g
i
h
k
Fig. 1.
b
B.
Fig. 7.
C
h
g
B
b
z
Fi
A
Fig. 5
c
b
Fig. 3
d
a

Tab. II.

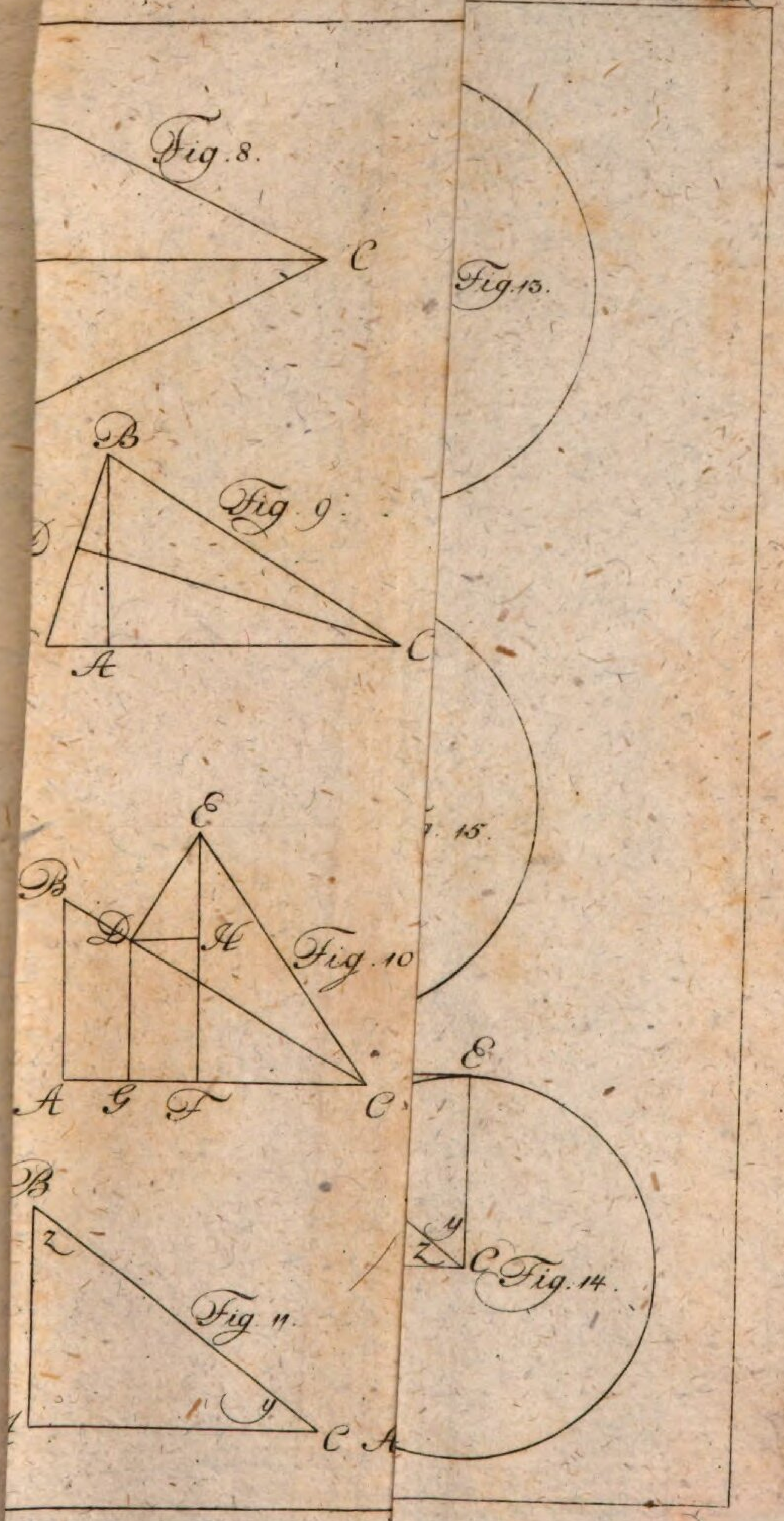
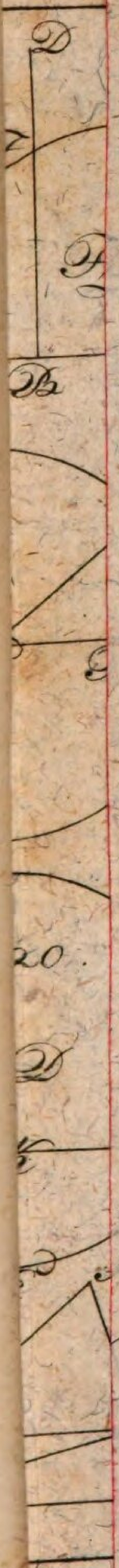
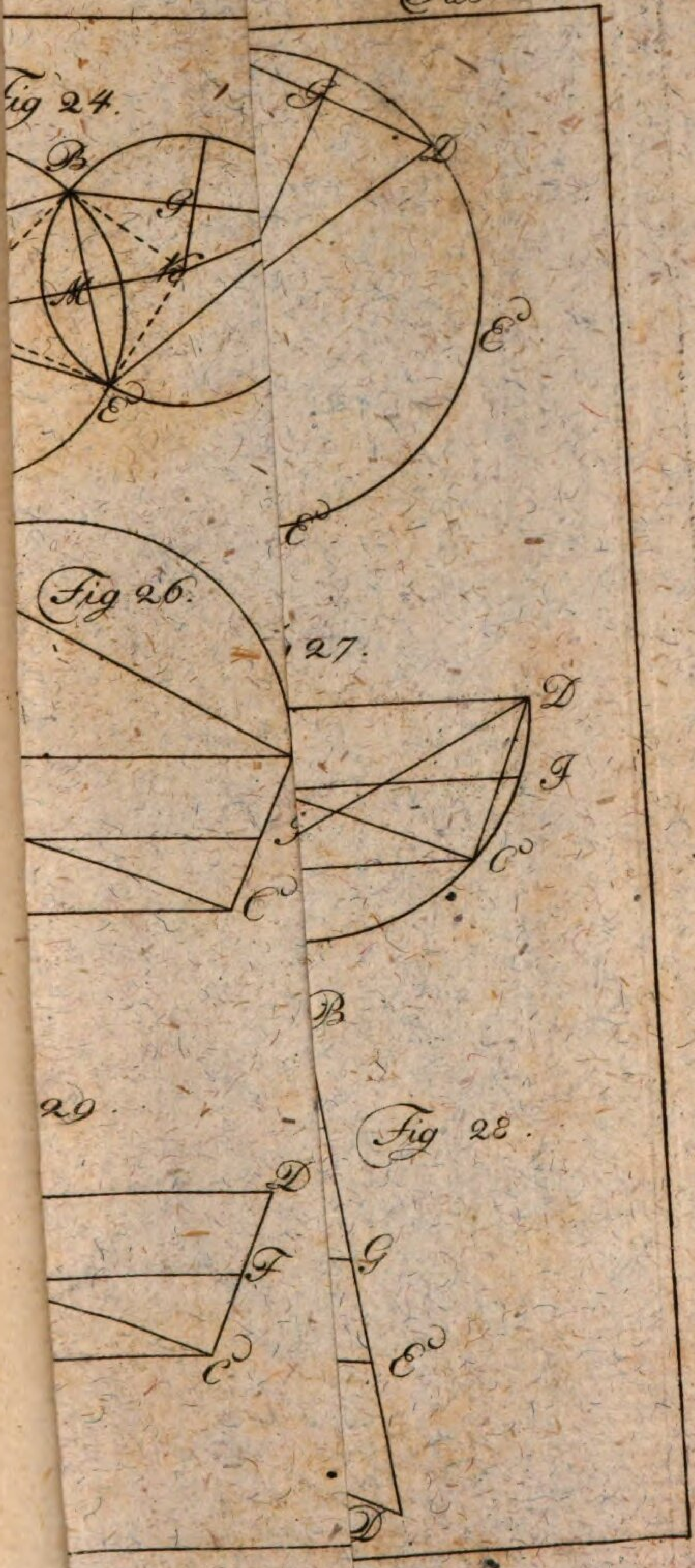


Fig. 8.
C
Fig. 13.
B
Fig. 9.
D
A
C
Fig. 15.
E
B
D
H
Fig. 10
A
G
F
C
E
y
Z
C
Fig. 14.
B
z
Fig. 11.
y
C
A



Tab. IV.



E
k
A

Tab V.

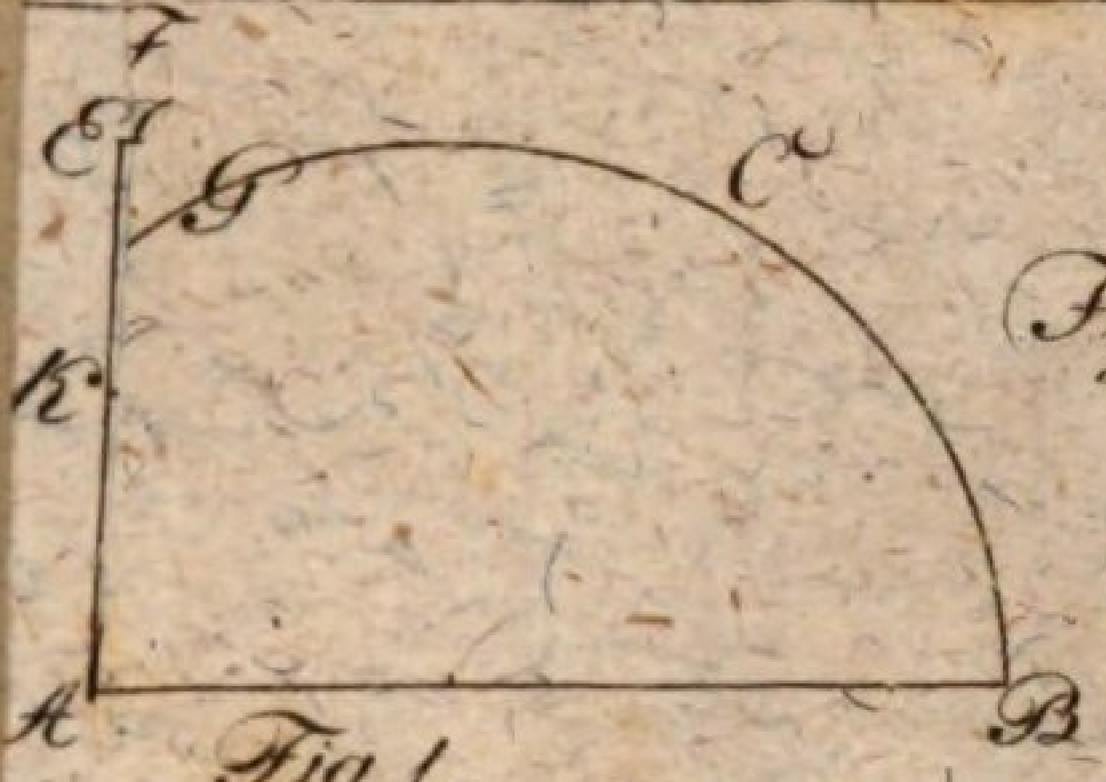


Fig 33:

Fig 1.

Fig 2.

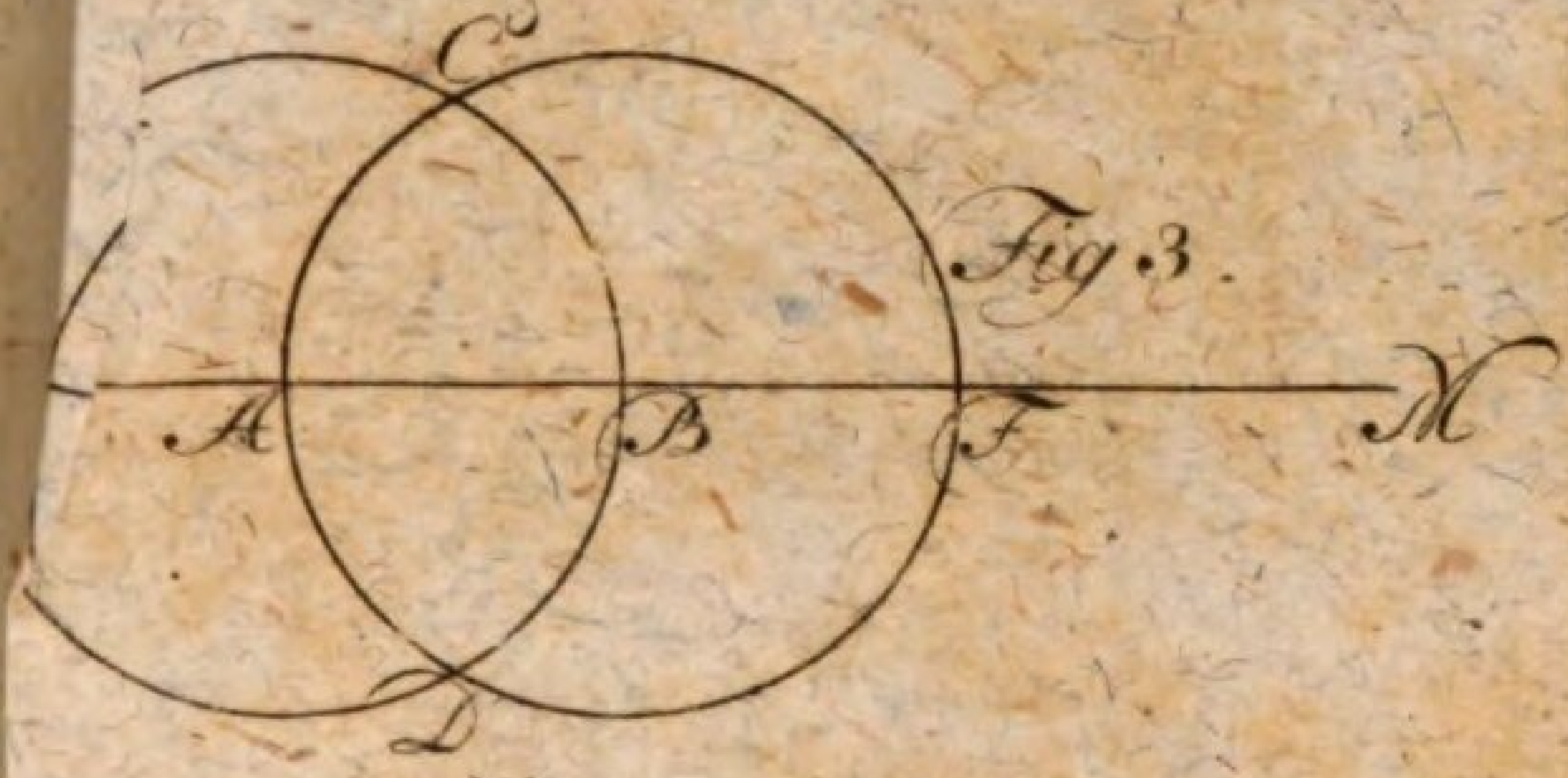


Fig 3.

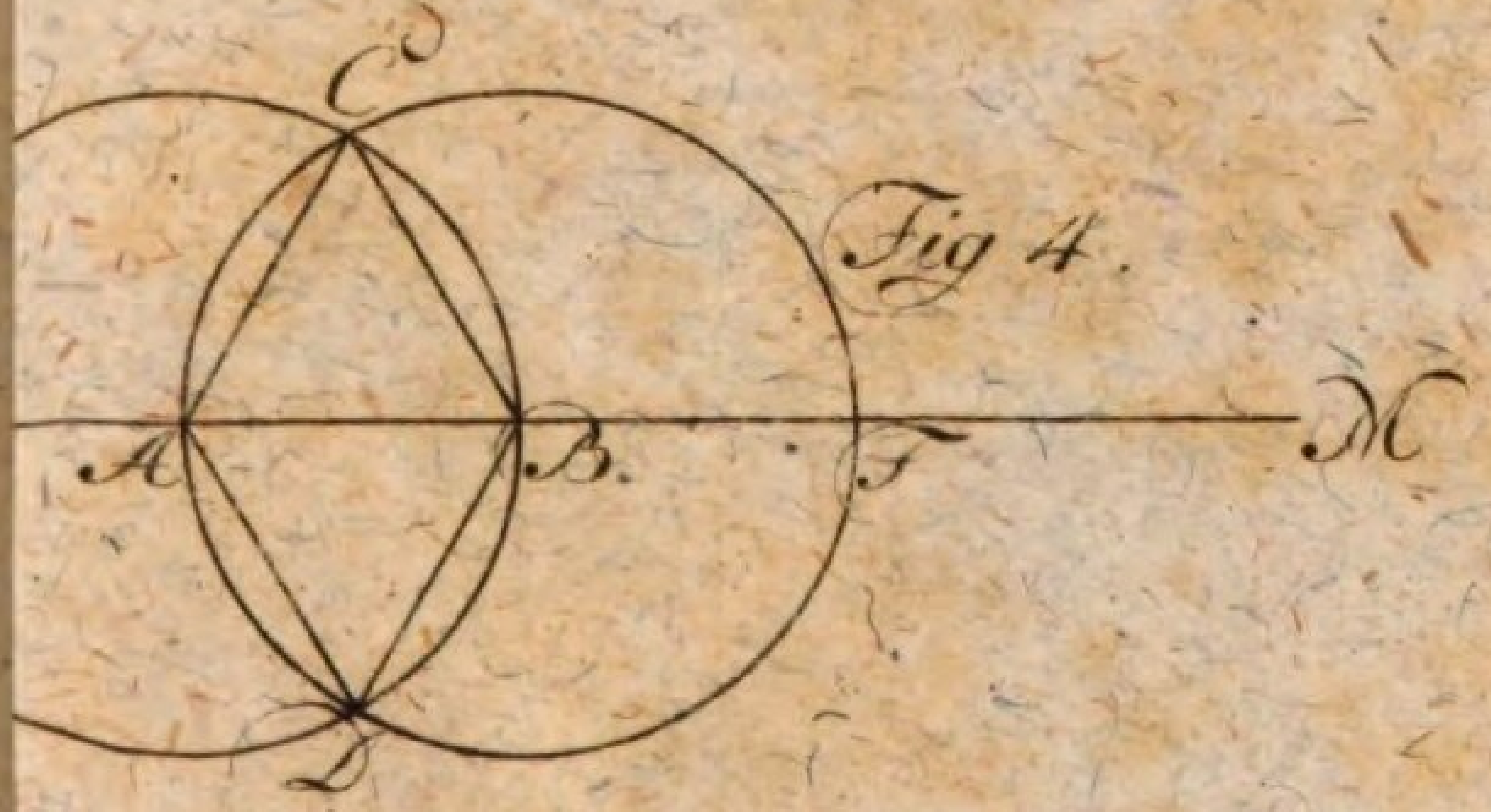


Fig 4.

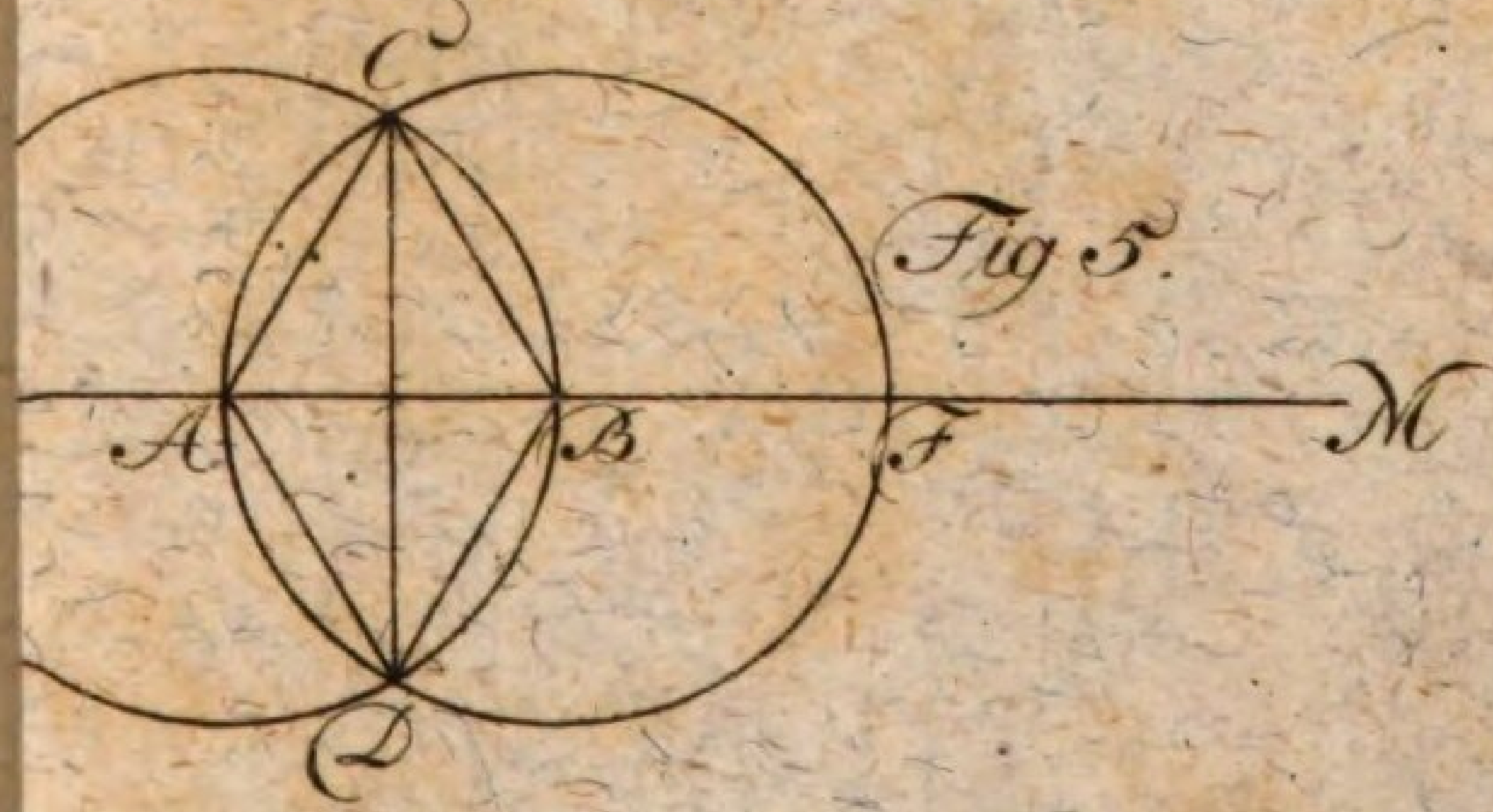


Fig 5.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian, 1749-1797

Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik insbesondere für Schullehrer und Praktiker

Bd.: 1,3

Berlin (1790)

Math.u. 131-1,1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594139-0
VD18 80341411-001